CÁLCULO: VOLUME III

MAURICIO A. VILCHES - MARIA LUIZA CORRÊA

Departamento de Análise - IME
UERJ

PREFÁCIO

"Por favor, poderia me dizer que caminho devo seguir agora?
Isso depende bastante de até onde você quer chegar."
Lewis Carrol - Alice no País das Maravilhas

Mauricio A. Vilches - Maria Luiza Corrêa
Rio de Janeiro

Conteúdo

Capítulo 1

GEOMETRIA ANALÍTICA

1.1 Introdução

Neste capítulo estabeleceremos os conceitos básicos para o estudo do Cálculo em várias variáveis. Não pretendemos fazer um estudo detalhado de vetores ou de Geometria Analítica, mas recomendamos aos leitores, consultar a bibliografia como complemento necessário deste capítulo.

1.2 Espaços Euclidianos

O espaço euclidiano n-dimensional ($n \in \mathbb{N}$) é o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots\ldots \times \mathbb{R}.$$

1. Se $n = 1$, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ é a reta coordenada.

2. Se $n = 2$, $\mathbb{R}^2$ é o plano ccordenado.

3. Se $n = 3$, $\mathbb{R}^3$ é o espaço coordenado tridimensional.

1.3 O Espaço Euclidiano Tridimensional

O espaço euclidiano tridimensional é definido pelo conjunto:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,/\, x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, os elementos de $\mathbb{R}^3$ são ternos ordenados. Dados $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, tem-se $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$ se, e somente se, $x = x_1$, $y = y_1$ e $z = z_1$.

Em $\mathbb{R}^3$ podem ser definidas duas operações.

Definição 1.1. Dados (x, y, z), $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ e $\beta \in \mathbb{R}$, definimos:

1. **Adição de elementos de $\mathbb{R}^3$:**

$$(x, y, z) + (x_1, y_1, z_1) = (x + x_1, y + y_1, z + z_1).$$

2. **Multiplicação de elementos de $\mathbb{R}^3$ por escalares de $\mathbb{R}$:**

$$\beta\,(x, y, z) = (\beta\,x, \beta\,y, \beta\,z).$$

Estas duas operações satisfazem às seguintes propriedades:

Proposição 1.1. Dados $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ e $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ elementos de $\mathbb{R}^3$ e α, $\beta \in \mathbb{R}$; então:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
3. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$.
4. $\alpha\,(\beta\,\mathbf{x}) = (\alpha\,\beta)\,\mathbf{x}$
5. $\beta\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \beta\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{y}$
6. $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\,\mathbf{x} + \beta\,\mathbf{x}$
7. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot 1 = \mathbf{x}$
8. $\exists\, -\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = 0$.
9. Se $\mathbf{x} = (x, y, z)$, então $-\mathbf{x} = (-x, -y, -z)$

■

Em geral, um conjunto onde são definidas as operações de adição e multiplicação por um número real (escalar), como na definição anterior, satisfazendo às propriedades anteriores é chamado espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seus elementos são chamados vetores. Logo, $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial (de dimensão 3) sobre $\mathbb{R}$.

De forma analoga, $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$.

1.4 Sistema de Coordenadas Ortogonais no Espaço

Escolhamos três retas mutuamente perpendiculares e denotemos por $\vec{0}$ o ponto de interseção das retas, chamado origem. Estas retas, ditas eixos coordenados, são designadas como o eixo dos x, eixo dos y e eixo dos z, respectivamente.

Os eixos dos x e dos y formam um plano horizontal e o eixo dos z é ortogonal a este plano. Os planos que contem os eixos coordenados, chamados planos coordenados, são: plano xy se contem os eixos dos x e dos y; plano xz se contem os eixos dos x e dos z e plano yz se contem os eixos dos y e dos z.

Os planos coordenados dividem o espaço em oito partes chamadas octantes. Um terno ordenado de números reais (x, y, z) está associado a um único ponto P do sistema de coordenadas.

A distância do ponto P ao plano yz é a coordenada x de P, a distância do ponto P ao plano xz é a coordenada y de P e a distância do ponto P ao plano xy é a coordenada z de P. Estas três coordenadas são as coordenadas retangulares do ponto P e determinam uma correspondência um a um entre ternos ordenados e pontos do sistema de coordenadas. Ao $\vec{0}$ está associado o terno $(0, 0, 0)$.

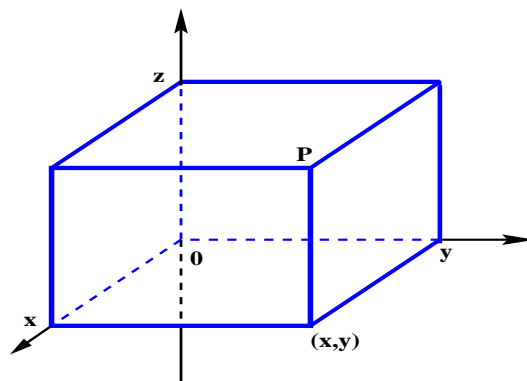



Figura 1.1:

Observações 1.1.

1. Os elementos de $\mathbb{R}^3$ são denominados pontos ou vetores, com o seguinte cuidado: $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é um vetor que tem a origem em $(0, 0, 0)$ e extremidade em (x, y, z) e é também chamado vetor posição de (x, y, z).

2. Para ter uma melhor distinção denotaremos os vetores de forma diferente da dos pontos. Por exemplo $\vec{0} = (0, 0, 0)$ é o vetor nulo.

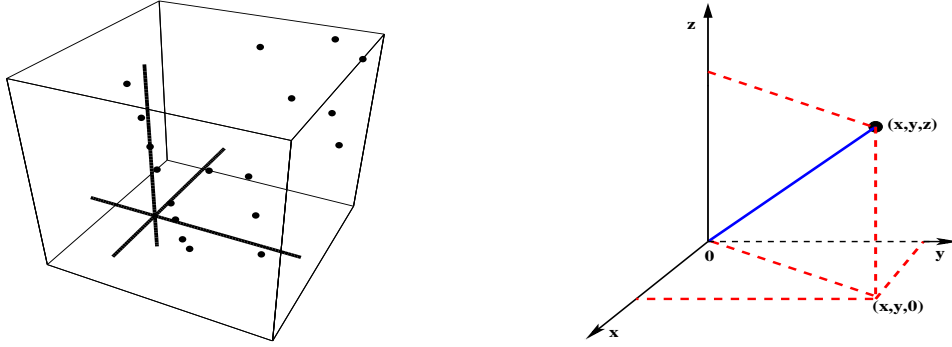



Figura 1.2:

Dados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, o vetor $\vec{\mathbf{v}}$ determinado por $\overrightarrow{P_1P_2}$ é:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)}$$

O vetor $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{OP}$ é o vetor posição do ponto P.

Exemplos 1.1.

[1] Se $P_1 = (3, 2, 1)$ e $P_2 = (-2, 1, -5)$, determine $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Da definição:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-2, 1, -5) - (3, 2, 1) = (-5, -1, -6).$$

[2] Se $P_1 = (\sqrt{2}, 1, \pi)$ e $P_2 = (2, 1, 2\,\pi)$, determine $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Da definição:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2, 1, 2\,\pi) - (\sqrt{2}, 1, \pi) = (2 - \sqrt{2}, 0, \pi).$$

1.5 Produto Escalar

Definição 1.2. Sejam $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ vetores em $\mathbb{R}^3$. O produto escalar de $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$, denotado por $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ (ou $< \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} >$) é definido por:

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3}$$

Analogamente se define o produto escalar de vetores em $\mathbb{R}^2$.

Proposição 1.2. Sejam $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ e $\beta \in \mathbb{R}$, então:

1. $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \geq 0$
2. $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$ se e somente se, $\vec{\mathbf{v}} = \vec{0}$.
3. $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
4. $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{0} = 0$.
5. $(\beta\,\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\beta\,\vec{\mathbf{v}}) = \beta\,(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$.
6. $\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}}) + (\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$.

■

As propriedades podem ser provadas diretamente da definição.

Definição 1.3. O vetor $\vec{\mathbf{v}}$ é ortogonal a $\vec{\mathbf{w}}$ se e somente se

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0}$$

O vetor $\vec{0}$ é o único vetor ortogonal a todos os vetores de $\mathbb{R}^3$. Se $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{\mathbf{w}} = (x, y)$, então os vetores $(-y, x)$ e $(y, -x)$ são ortogonais a $\vec{\mathbf{w}}$.

1.6 Norma Euclidiana de um Vetor

Definição 1.4. Seja $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. A norma euclidiana de $\vec{\mathbf{v}}$ é denotada por $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ e definida por:

$$\boxed{\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

O vetor $\vec{\mathbf{v}}$ é dito **unitário se** $\|\vec{\mathbf{v}}\| = 1$.

Proposição 1.3.

1. Se $\vec{\mathbf{w}} \neq \vec{0}$ não é unitário, então o vetor definido por:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{\vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{w}}\|},$$

   é unitário e tem a mesma direção de $\vec{\mathbf{w}}$.

2. Se θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$, então:

$$\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \|\vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{u}}\|\,cos(\theta).$$

■

A propriedade 1, pode ser provada diretamente da definição. A segunda, aplicamos a lei dos co-senos ao triângulo da figura, temos:

$$\|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - 2\,\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\,cos(\theta).$$

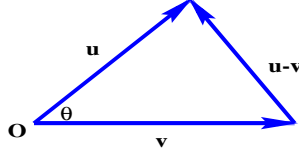



Figura 1.3:

$\|\vec{\mathbf{u}}\|^2 = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$; temos: $\big(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\big) \cdot \big(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\big) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} - 2\,\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\,cos(\theta)$; logo,

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}} - 2\,\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\,cos(\theta);$$

então, $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\,cos(\theta)$.

Três vetores de $\mathbb{R}^3$ tem um destaque especial, a saber:

$$\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0), \quad \vec{\mathbf{j}} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{k}} = (0,0,1).$$

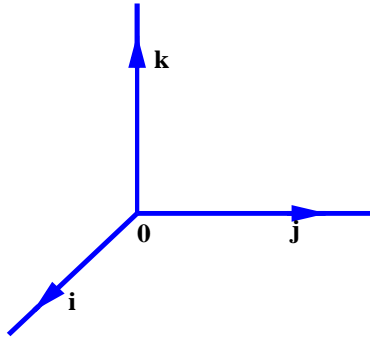



Figura 1.4: Os vetores $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ e $\vec{\mathbf{k}}$.

Os vetores $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ e $\vec{\mathbf{k}}$ são unitários e mutuamente ortogonais. O conjunto $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ é dito a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Para todo $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ temos:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}} = v_1\,\vec{\mathbf{i}} + v_2\,\vec{\mathbf{j}} + v_3\,\vec{\mathbf{k}}}$$

1.7 Ângulos Diretores e Co-senos Diretores

Os ângulos diretores de um vetor não nulo $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ são os ângulos α, β e γ, no intervalo $[0, \pi]$ que $\vec{\mathbf{v}}$ forma com os eixos coordenados.

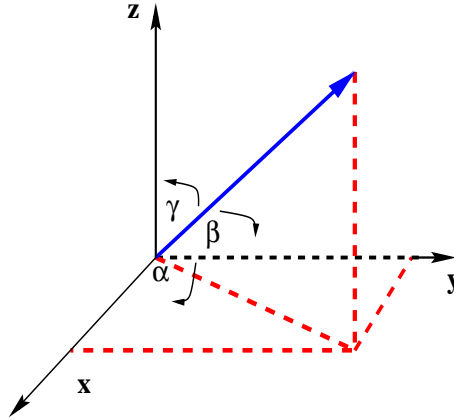



Figura 1.5:

Os co-senos desses ângulos diretores, $cos(\alpha)$, $cos(\beta)$ e $cos(\gamma)$ são chamados co-senos diretores do vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Pelas propriedades do produto escalar, temos:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{i}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{i}}\|} = \frac{v_1}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}},$$

$$cos(\beta) = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{j}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{j}}\|} = \frac{v_2}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

e

$$cos(\gamma) = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{k}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{k}}\|} = \frac{v_3}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

O vetor $\vec{\mathbf{v}}$ fica univocamente determinado conhecendo seu comprimento e seus ângulos diretores. De fato:

$$v_1 = \|\vec{\mathbf{v}}\|\, cos(\alpha), \quad v_2 = \|\vec{\mathbf{v}}\|\, cos(\beta) \quad \text{e} \quad v_3 = \|\vec{\mathbf{v}}\|\, cos(\gamma).$$

Note que $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) = 1$.

Exemplos 1.2.

[1] Sejam $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2, 3)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (-2, 1, 3)$. Determine $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$ e os vetores unitários nas direções de $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, respectivamente.

Primeiramente calculamos $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = -2 + 2 + 9 = 9$. Agora devemos determinar:

$$\frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} \quad \text{e} \quad \frac{\vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{w}}\|}.$$

$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ e $\|\vec{\mathbf{w}}\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$; logo,

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\Big) \quad \text{e} \quad \Big(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\Big),$$

são os vetores unitários nas direções de $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, respectivamente.

[2] Sejam $\vec{\mathbf{v}} = (x, -2, 3)$ e $\vec{\mathbf{u}} = (x, x, -5)$. Determine o valor de x para que $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$ sejam ortogonais.

Da definição $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$ são ortogonais se $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$; então, $\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = x^2 - 2\,x - 15 = 0$, equação que tem soluções $x = 5$ e $x = -3$; logo: $\vec{\mathbf{v}} = (5, -2, 3)$ e $\vec{\mathbf{u}} = (5, 5, -5)$ são ortogonais e $\vec{\mathbf{v}} = (-3, -2, 3)$ e $\vec{\mathbf{u}} = (-3, -3, -5)$ são ortogonais.

[3] Sejam $P_1 = (3, -2, -1)$, $P_2 = (1, 4, 1)$, $P_3 = (0, 0, 1)$ e $P_4 = (-1, 1, -1)$. Determine o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_3P_4}$.

Sejam $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1-3, 4+2, 1+1) = (-2, 6, 2)$ e $\vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{P_3P_4} = (-1, 1, -2)$. O ângulo formado por $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ é:

$$cos(\theta) = \frac{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{w}}\|} = \sqrt{\frac{2}{33}}.$$

[4] Calcule os co-senos diretores de $\vec{\mathbf{u}} = (-2, 1, 2)$.

Como $\|\vec{\mathbf{u}}\| = 3$, $cos(\alpha) = -\dfrac{2}{3}$, $cos(\beta) = \dfrac{1}{3}$ e $cos(\gamma) = \dfrac{2}{3}$.

1.7.1 Trabalho

Suponha que uma força constante $\vec{F}$ move uma partícula de um ponto P até um ponto Q. O trabalho realizado pela partícula é dado por:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{PQ}}$$

Se a unidade de comprimento é dada em metros e a força é dada em Newtons, o trabalho é dado em Joules (J).

Exemplo 1.1.

Uma força dada por $\vec{F} = (1, 2, 3)$ move uma partícula do ponto $(1, 1, 1)$ ao ponto $(4, 2, 3)$; logo: $W = (1, 2, 3) \cdot (3, 1, 2) = 3 + 2 + 6 = 11\,J$.

1.8 Produto Vetorial

Definição 1.5. Dados $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ vetores em $\mathbb{R}^3$, o produto vetorial de $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$, denotado por $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ é definido por:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{k}}}$$

Logo, da definição segue:

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \big(v_2\, w_3 - v_3\, w_2\big)\, \vec{\mathbf{i}} + \big(v_3\, w_1 - v_1\, w_3\big)\, \vec{\mathbf{j}} + \big(v_1\, w_2 - v_2\, w_1\big)\, \vec{\mathbf{k}}.$$

Proposição 1.4. Sejam $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ e $\vec{\mathbf{u}}$ vetores do $\mathbb{R}^3$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Então:

1. $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{0}$.
2. $\vec{0} \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{0} = \vec{0}$.
3. $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = -\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}$.
4. $\vec{\mathbf{v}} \times (\vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}$.
5. $\beta\, \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \times \beta\, \vec{\mathbf{w}} = \beta\, (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$.
6. $\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\| = \|\vec{\mathbf{v}}\|\, \|\vec{\mathbf{w}}\|\, sen(\theta)$, onde θ é o ângulo formado por $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$.
7. Os vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ são paralelos se e somente se $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$.
8. O vetor $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$ é ortogonal aos vetores $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$.
9. A área do paralelogramo determinado por $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ é $\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|$.

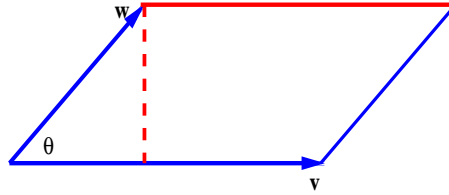



Figura 1.6:

10. **Identidade de Lagrange:** $\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2\, \|\vec{\mathbf{w}}\|^2 - (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}})^2$.
11. $$\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$
12. O volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ é dado por

$$V = |\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})|.$$

Prova: As provas seguem diretamente das definições. Por exemplo:

7. Se $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$ o ângulo formado pelos vetores é zero ou π; logo, os vetores são paralelos.

9. A base do paralelogramo é $\|\vec{\mathbf{v}}\|$ e sua altura é $\|\vec{\mathbf{w}}\|\, sen(\theta)$, onde θ é o ângulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$.

10. $\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2\, \|\vec{\mathbf{w}}\|^2\, sen^2(\theta) = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2\, \|\vec{\mathbf{w}}\|^2\, (1 - cos^2(\theta)) = |\vec{\mathbf{v}}\|^2\, \|\vec{\mathbf{w}}\|^2 - (\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}})^2$.

12. A área da base é $A = \|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|$; seja θ o ângulo formado por $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$; logo, a altura do paralelepípedo é $h = \|\vec{\mathbf{u}}\|\, |cos(\theta)|$; então, $V = |\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})|$.

■

Exemplo 1.2.

[1] Sejam $\vec{\mathbf{v}} = (-3, -2, 2)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 1, 2)$. Calcule $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, $(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{v}}$ e $(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{u}}$.

Da definição e das propriedades temos:

$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = (-6, 4, -5)$ e $(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{v}} = (2, -27, -24)$ e $(\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} = (-13, -18, 2)$.

[2] Calcule $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}$ e $(\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}}) \times (\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}})$.

Da definição temos: $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = (0, 0, 1) = \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{k}} = (0, -1, 0) = -\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = (1, 0, 0) = \vec{\mathbf{i}}$ e $(\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}}) \times (\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}}) = \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}$.

[3] Calcule a área do triângulo determinado por $P = (2, 2, 0)$, $Q = (-1, 0, 2)$ e $R = (0, 4, 3)$.

A área do triângulo é a metade da área do paralelogramo determinado por $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{PQ}$ e $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PR}$; logo:

$$A = \frac{\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|}{2} = \frac{\|(-10, 5, -10)\|}{2} = \frac{15}{2}.$$

[4] Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{\mathbf{u}} = (2, -3, 4)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2, -1)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (3, -1, 2)$.

Como $\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = (3, -5, -7)$, temos $V = |\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})| = |-7| = 7$.

[5] Determine o valor de k tal que $\vec{\mathbf{u}} = (2, -1, 1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2, -3)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (3, k, 5)$ sejam coplanares.

Se $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}}$ são coplanares, então, $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = \vec{0}$; caso contrário, determinariam um paralelepípedo e, portanto, os vetores não poderiam ser coplanares.

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}} = (10 + 3\,k, -14, k - 6);$$

logo, $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = 7\,k + 28$; resolvendo $7\,k + 28 = 0$, temos $k = -4$.

1.8.1 Torque

Se uma força $\vec{F}$ age num ponto de um corpo rígido, de vetor posição $\vec{r}$, então essa força tende a girar o corpo em torno de um eixo que passa pela origem do vetor posição e é perpendicular ao plano de $\vec{r}$ e $\vec{F}$. O vetor torque (relativo à origem) é dado por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. O torque fornece uma medida do efeito de um corpo rígido ao rodar em torno de um eixo. A direção de $\vec{\tau}$ indica o eixo de rotação.

Exemplo 1.3.

[1] Uma força $\vec{F} = (2,5,8)$ age num ponto de um corpo rígido, de coordenadas $(1,1,2)$. Calcule o torque.

Da definição $\vec{r} = (1,1,2)$; logo, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (1,1,2) \times (2,5,8) = (-2,-4,3)$. A direção de $(-2,-4,3)$ indica o eixo de rotação.

[2] Um parafuso é apertado aplicando uma força de $300\,N$ com uma chave de $0.45\,m$ de comprimento fazendo um ângulo de $\dfrac{\pi}{4}$ como na figura. Determine o módulo do torque em torno do centro do parafuso.

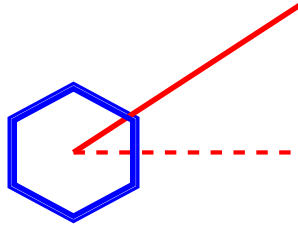



Figura 1.7:

Comos $\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r} \times \vec{F}\| = \|\vec{r}\|\,\|\vec{F}\|\,sen(\alpha)$; temos que $\|\vec{r}\| = 0.45$, $\|\vec{F}\| = 300$ e $sen\big(\dfrac{\pi}{4}\big) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, temos, $\|\vec{\tau}\| = 67.5\,\sqrt{2}\,J$.

1.9 Distância em $\mathbb{R}^3$

Definição 1.6. Sejam $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$ pontos do $\mathbb{R}^3$. A distância entre P_1 e P_2 é denotada e definida por:

$$\boxed{d_0(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}}$$

Em particular, se $P = (x,y,z)$:

$$\boxed{d_0(\mathbf{0},P) = \|\overrightarrow{0P}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Proposição 1.5. Sejam P_1, P_2 e P_3 pontos do $\mathbb{R}^3$, então:

1. $d_0(P_1, P_2) > 0$
2. $d_0(P_1, P_2) = 0 \Longleftrightarrow P_1 = P_2$.
3. $d_0(P_1, P_2) = d_0(P_2, P_1)$
4. **Desiguladade triangular:**

$$d_0(P_1, P_3) \leq d_0(P_1, P_2) + d_0(P_2, P_3).$$

1.10 Retas

Sejam $P = (x_1, y_1, z_1)$ um ponto e $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ um vetor em $\mathbb{R}^3$. A reta que passa pelo ponto P e tem direção $\vec{\mathbf{v}}$ é dada, parametricamente, por:

$$\boxed{P(t) = P + t\,\vec{\mathbf{v}},\ \ t \in \mathbb{R}}$$

Em coordenadas:

$$\begin{cases} x(t) = & x_1 + t\,v_1 \\ y(t) = & y_1 + t\,v_2 \\ z(t) = & z_1 + t\,v_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dados $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, vamos obter a equação da reta que passa por P_1 e P_2.

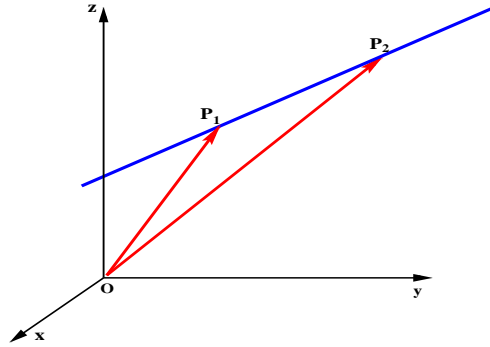



Figura 1.8: A reta que passa por P_1 e P_2.

A direção da reta é dada por $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2}$; logo, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + t\,(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \\ z(t) = z_1 + t\,(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exemplo 1.4.

[1] Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e tem a direção do vetor $(2, 1, 3)$. Ache outro ponto da reta.

Sejam $P = (1, -1, 1)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (2, 1, 3)$; logo,

$$\begin{cases} x(t) = & 1 + 2\,t \\ y(t) = & -1 + t \\ z(t) = & 1 + 3\,t, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$. Fazendo, por exemplo, $t = 1$ na equação da reta, temos que $(3, 0, 4)$ é um ponto da reta.

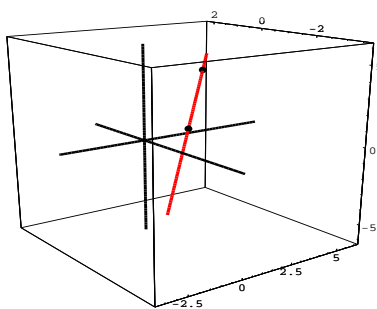



Figura 1.9: A reta do exemplo [1].

[2] Determine a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (-2, -1, 3)$ e $P_2 = (3, 2, 7)$.

A direção da reta é $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2} = (5, 3, 4)$; logo a equação é:

$$\begin{cases} x(t) = & -2 + 5\,t \\ y(t) = & -1 + 3\,t \\ z(t) = & 3 + 4\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

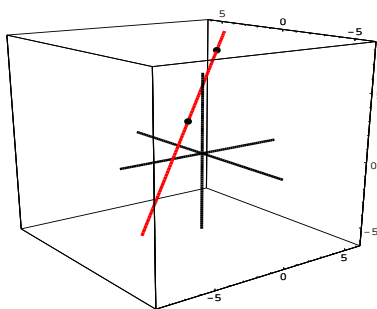



Figura 1.10: A reta do exemplo [2].

1.10.1 Paralelismo e Perpendicularismo

Sejam l_1 e l_2 retas de direções $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente; então:

1. l_1 é paralela a l_2 se, e somente se, $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$.
2. l_1 é perpendicular a l_2 se, e somente se, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

A prova segue diretamente das definições.

Exemplo 1.5.

[1] As retas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = -3 + 6\,t \\ z = 1 + 4\,t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 4 - t \\ y = -3\,t \\ z = -5 - 2\,t \end{cases}$$

são paralelalas. De fato, $\vec{v}_1 = (2, 6, 4)$, $\vec{v}_2 = (-1, -3, -2)$ e $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$.

[2] As retas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = -3 + 6\,t \\ z = 1 + 4\,t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3 + t \\ z = -5 - t \end{cases}$$

são perpendiculares. De fato, $\vec{v}_1 = (2, 6, 4)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, -1)$ e $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$.

[3] As retas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = -2 + 3\,t \\ z = 4 + t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = 5\,t \\ y = 3 + 2\,t \\ z = -3 + 3\,t \end{cases}$$

não são paralelas nem perpendiculares e não se intersectam. Tais retas são ditas reversas.

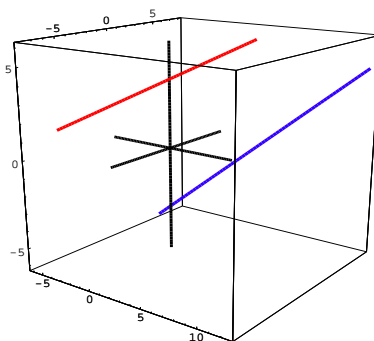



Figura 1.11: As retas do exemplo [3].

1.10.2 Forma Simétrica da Equação da Reta

Eliminando o parâmetro t na equação da reta, obtemos a forma simétrica da equação da reta:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}}$$

sendo os $v_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq 3)$. Se, por exemplo, $v_1 = 0$, obtemos:

$$x = x_1, \qquad \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3};$$

os outros casos são análogos.

1.10.3 Distância de um Ponto a uma Reta

Seja P um ponto que não pertence à reta que passa pelos pontos Q e R. A distância do ponto P à reta é:

$$\boxed{d_1 = \frac{\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}}$$

onde $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{QR}$ e $\vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{QP}$. A prova deste fato fica como exercício.

Exemplo 1.6.

[1] Ache a distância do ponto $P = (2, 1, -1)$ à reta que passa pelos pontos $Q = (2, 0, 1)$ e $R = (-2, -2, 1)$.

Como $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{QR} = (-4, -2, 0)$, $\vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{QP} = (0, 1, -2)$; logo,

$$d_1 = \frac{\|\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}\|}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \sqrt{\frac{24}{5}}.$$

1.11 Planos

Definição 1.7. Sejam o vetor $\vec{\mathbf{n}} \neq \vec{0}$ e o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, fixado. O conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

$$\boxed{\vec{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0}$$

é chamado plano passando por P_0 e tendo normal $\vec{\mathbf{n}}$. Em particular, se $\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c)$, o plano passando por P_0 e de normal $\vec{\mathbf{n}}$, tem a equação em coordenadas:

$$\boxed{a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0}$$

Exemplo 1.7.

[1] Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(1,-1,1)$ e é normal ao vetor $(-1,2,3)$.

Sejam $P_0=(1,-1,1)$ e $\vec{\mathbf{n}}=(-1,2,3)$; então:

$$-1\,(x-1)+2\,(y+1)+3\,(z-1)=-x+2\,y+3\,z.$$

A equação é $-x+2\,y+3\,z=0$.

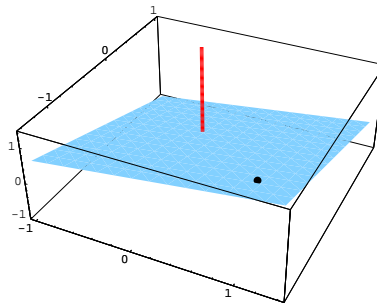



Figura 1.12: Exemplo [1].

[2] Ache a equação do plano que passa pelo ponto $(1,-1,-1)$ e é normal ao vetor $(3,2,-3)$.

Sejam $P_0=(1,-1,-1)$ e $\vec{\mathbf{n}}=(3,2,-3)$; então: $3\,(x-1)+2\,(y+1)-3\,(z+1)=3\,x+2\,y-3\,z-4$.
A equação é $3\,x+2\,y-3\,z=4$.

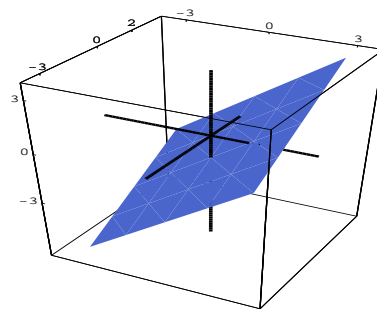



Figura 1.13: Exemplo [2].

Considerando a equação do primeiro grau nas variáveis x, y e z:

$$a\,x+b\,y+c\,z+d=0,$$

onde a, b e $c\in\mathbb{R}$ não são todas nulas, o subconjunto do $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{\mathbf{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\}}$$

é o plano com vetor normal $\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c)$.

Por simplicidade usaremos a expressão plano $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ em lugar de, o plano de equação $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.

Exemplo 1.8.

Determine a equação do plano que passa pelos pontos $P_1 = (1, 1, 1)$,
$P_2 = (2, 0, 0)$ e $P_3 = (1, 1, 0)$.

Qualquer vetor normal ao plano deve ser ortogonal aos vetores $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2}$ e
$\vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{P_2P_3}$, que são paralelos ao plano.
Logo, o vetor normal ao plano é $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}$, donde $\vec{\mathbf{n}} = (1, 1, 0)$; logo, a equação do plano é $x + y + d = 0$; como $(2, 0, 0)$ pertence ao plano, temos: $d = -2$ e a equação é $x + y - 2 = 0$.

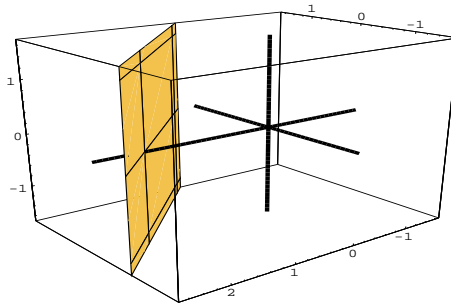



Figura 1.14:

1.11.1 Ângulo entre Planos

Definição 1.8. O ângulo entre dois planos é o menor ângulo formado pelos vetores normais aos planos.

Logo, se $\vec{\mathbf{n}}_1$ e $\vec{\mathbf{n}}_2$ são os vetores normais aos planos, então:

$$\boxed{cos(\theta) = \frac{\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2}{\|\vec{\mathbf{n}}_1\| \, \|\vec{\mathbf{n}}_2\|}}$$

Exemplo 1.9.

[1] Determine o ângulo entre os planos $5\,x - 2\,y + 5\,z = 12$ e $2\,x + y - 7\,z = -11$.

Os vetores normais aos planos são $\vec{\mathbf{n}}_1 = (5, -2, 5)$ e $\vec{\mathbf{n}}_2 = (2, 1, -7)$, respectivamente; logo, $\cos(\theta) = \dfrac{\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2}{\|\vec{\mathbf{n}}_1\|\,\|\vec{\mathbf{n}}_2\|} = -\dfrac{1}{2}$ e $\theta = \dfrac{2\,\pi}{3}\,rad$.

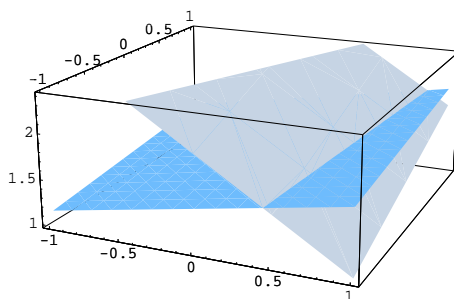



Figura 1.15:

[2] Determine o ângulo entre os planos $x + y - z = 0$ e $x - 2\,y + 2\,z = 0$.

Os vetores normais aos planos são $\vec{\mathbf{n}}_1 = (1, 1, -1)$ e $\vec{\mathbf{n}}_2 = (1, -2, 2)$, respectivamente; logo:

$$cos(\theta) = \frac{\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2}{\|\vec{\mathbf{n}}_1\|\,\|\vec{\mathbf{n}}_2\|} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

e $\theta = arccos(-\dfrac{1}{\sqrt{3}})\,rad$.

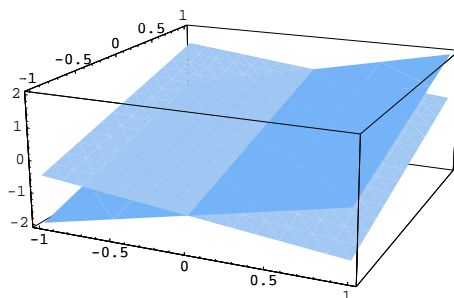



Figura 1.16:

1.11.2 Paralelismo e Perpendicularismo entre Planos

Definição 1.9. Dois planos são paralelos se, e somente se, seus vetores normais, respectivamente $\vec{\mathbf{n}}_1$ e $\vec{\mathbf{n}}_2$, são paralelos, isto é:

$$\boxed{\vec{\mathbf{n}}_1 \times \vec{\mathbf{n}}_2 = \vec{0}}$$

Dois planos são perpendiculares se, e somente se, seus vetores normais, respectivamente $\vec{\mathbf{n}}_1$ e $\vec{\mathbf{n}}_2$, são ortogonais, isto é:

$$\boxed{\vec{\mathbf{n}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_2 = 0.}$$

Proposição 1.6. Os planos $a\,x + b\,y + c\,z = d$ e $a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1$ são:

1. paralelos, se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $a = k\,a_1$, $b = k\,b_1$ e $c = k\,c_1$;

2. perpendiculares, se $a\,a_1 + b\,b_1 + c\,c_1 = 0$.

■

A prova segue das definições.

Exemplo 1.10.

Determine a equação do plano paralelo ao plano $3\,x + y - 6\,z + 8 = 0$ e que passa pelo ponto $P = (0, 0, 1)$.

O vetor normal ao plano é $\vec{\mathbf{n}} = (3, 1, -6)$; logo, a equação do plano é:

$$3\,x + y - 6\,z + d = 0;$$

como o ponto P pertence ao plano temos $-6 + d = 0$, logo, a equação do plano é

$$3\,x + y - 6\,z + 6 = 0.$$

Observações 1.2.

1. O plano:

$$a\,x + b\,y + d = 0$$

   é perpendicular ao plano xy.

2. O plano:

$$b\,y + c\,z + d = 0$$

   é perpendicular ao plano yz.

3. O plano:

$$a\,x + c\,z + d = 0$$

é perpendicular ao plano xz.

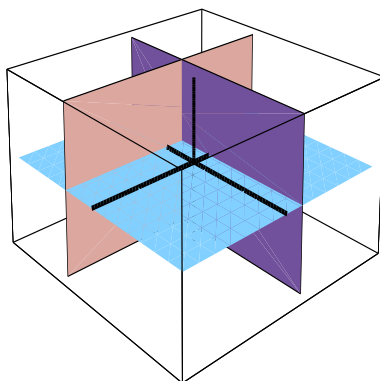



Figura 1.17: Planos coordenados.

1.11.3 Distância de um Ponto a um Plano

Definição 1.10. A distância do ponto $P_0 = (x_0, y_0 z_0)$ ao plano $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ é dada por:

$$\boxed{d_2 = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Exemplo 1.11.

[1] Determine a distância do ponto $(1, 1, -5)$ ao plano $12\,x + 13\,y + 5\,z + 2 = 0$.

Aplicando diretamente a fórmula: $d_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{13}$.

[2] Determine a distância entre os planos paralelos: $x + 2\,y - z = 8$ e $4\,x + 8\,y - 4\,z = 10$.

A distância entre dois planos paralelos é a distância entre um ponto qualquer do plano $x + 2\,y - z = 8$ ao plano $4\,x + 8\,y - 4\,z = 10$.

O ponto $(1, 4, 1)$ pertence ao plano $x + 2\,y - z = 8$. A distância do ponto $(1, 4, 1)$ ao plano $4\,x + 8\,y - 4\,z = 10$ é:

$$d_2 = \frac{|4 + 32 - 4 - 10|}{\sqrt{16 + 64 + 16}} = \frac{11}{2\,\sqrt{6}}.$$

Em geral, se $a\,x + b\,y + c\,z = d$ e $a\,x + b\,y + c\,z = d_1$ são planos paralelos, a distância entre os planos é:

$$\boxed{d_3 = \frac{|d_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

1.12 Generalizações

Podemos fazer as seguintes generalizações para $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Os pontos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ são $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ onde $x_i \in \mathbb{R}$.

Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, dizemos que:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \Longleftrightarrow x_i = y_i,$$

para todo $i = 1, ..., n$. $(0, ..., 0)$ é a origem do $\mathbb{R}^n$.

Em $\mathbb{R}^n$ podem ser definidas duas operações.

Dados $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$:

Adição de elementos de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

Multiplicação de elementos de $\mathbb{R}^n$ por escalares de $\mathbb{R}$:

$$\beta \cdot \mathbf{x} = (\beta \cdot x_1, \beta \cdot x_2, ..., \beta \cdot x_n).$$

Estas duas operações satisfazem as propriedades análogas às enunciadas para $\mathbb{R}^3$. Logo, $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$.

Os elementos do $\mathbb{R}^n$ são denominados pontos ou vetores, com o seguinte cuidado:

$$\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$$

é um vetor que tem a origem em $(0, ..., 0)$ e extremidade em $\vec{\mathbf{v}}$.

Para ter uma melhor distinção denotaremos os vetores de forma diferente da utilizada para os pontos. Por exemplo, $\vec{0} = (0, ..., 0)$ é o vetor nulo.

1.12.1 Produto Escalar

Se $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3, ..., u_n)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$ são vetores do $\mathbb{R}^n$, o produto escalar de $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$, denotado por $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ é definido por:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + ... + u_n \cdot v_n.$$

O produto escalar tem as seguintes propriedades:

1. $(\beta\,\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\beta\,\vec{\mathbf{v}}) = \beta\,(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$.
2. $\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = (\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}}) + (\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$.
3. $\vec{\mathbf{v}}$ é ortogonal a $\vec{\mathbf{w}}$ se, e somente se, $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$.

Norma euclidiana: Se $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ não é nulo:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}.$$

Distância: Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ são pontos do $\mathbb{R}^n$, então:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

1.13 Exercícios

1. Determine $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2}$, se:

   (a) $P_1 = (1, 2, 1),\ P_2 = (-5, 3, 1)$
   (b) $P_1 = (-3, 2, -1),\ P_2 = (15, 2, 6)$
   (c) $P_1 = (12, 222, 1),\ P_2 = (5, 23, 11)$
   (d) $P_1 = (4, 24, 18),\ P_2 = (-25, 23, 11)$
   (e) $P_1 = (9, 3, 1),\ P_2 = (9, -3, 2)$
   (f) $P_1 = (0, 12, -11),\ P_2 = (5, 2, 16)$
   (g) $P_1 = (1, 1, 1),\ P_2 = (5, 3, 0)$
   (h) $P_1 = (14, -12, 11),\ P_2 = (-1, 9, -1)$
   (i) $P_1 = (-6, -4, 1),\ P_2 = (-2, 2, -6)$
   (j) $P_1 = (4, -2, 20),\ P_2 = (3, 9, 9)$
   (k) $P_1 = (-16, 14, 1),\ P_2 = (2, -2, 6)$
   (l) $P_1 = (3, 3, 1),\ P_2 = (6, -9, 3)$
   (m) $P_1 = (6, -4, 6),\ P_2 = (4, 2, 6)$

(n) $P_1 = (11, 23, 2),\ P_2 = (3, 0, 3)$

(o) $P_1 = (2, 2, -6),\ P_2 = (1, -4, -2)$

2. Determine $\vec{v} \cdot \vec{w}$ e os vetores unitários nas direções de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, se:

(a) $\vec{v} = (1, 2, 1),\ \vec{w} = (-5, 3, 1)$

(b) $\vec{v} = (-3, 2, -1),\ \vec{w} = (1, 2, -6)$

(c) $\vec{v} = (2, -2, 2),\ \vec{w} = (-2, 2, 1)$

(d) $\vec{v} = (4, 1, 8),\ \vec{w} = (-2, -23, -1)$

(e) $\vec{v} = (\sqrt{5}, -3, 6),\ \vec{w} = (-9, -3, 2)$

(f) $\vec{v} = (0, 1, -1),\ \vec{w} = (3, 2, 6)$

(g) $\vec{v} = (1, 1, 1),\ \vec{w} = (0, 3, 0)$

(h) $\vec{v} = (-1, -1, -1),\ \vec{w} = (7, -3, 2)$

(i) $\vec{v} = (4, -2, 11),\ \vec{w} = (-1, 0, -1)$

(j) $\vec{v} = (-6, -4, 1),\ \vec{w} = (-2, 2, -6)$

(k) $\vec{v} = (4/3, -1, 1),\ \vec{w} = (-2/5, 5, -1)$

(l) $\vec{v} = (4/5, 4, 1/6),\ \vec{w} = (2/3, -1, 3/4)$

3. Determine o ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, se:

(a) $\vec{v} = (-1, 2, -1),\ \vec{w} = (-5, 3, 1)$

(b) $\vec{v} = (-1, -2, -1),\ \vec{w} = (1, -2, -6)$

(c) $\vec{v} = (2, -2, -2),\ \vec{w} = (-1, 2, 1)$

(d) $\vec{v} = (1, 1, -8),\ \vec{w} = (-2, -3, -1)$

(e) $\vec{v} = (5, -2, -6),\ \vec{w} = (-8, 3, -2)$

(f) $\vec{v} = (0, 1, -1),\ \vec{w} = (3, 2, 6)$

(g) $\vec{v} = (1, 1, 1),\ \vec{w} = (0, 3, 0)$

(h) $\vec{v} = (-1, -1, -1),\ \vec{w} = (7, -3, 2)$

(i) $\vec{v} = (4, -2, -1),\ \vec{w} = (1, 0, 1)$

(j) $\vec{v} = (-6, -4, 1),\ \vec{w} = (-2, 2, 0)$

4. Determine o valor k tal que os seguintes vetores sejam ortogonais:

(a) $\vec{v} = (3, -2\,k, 4),\ \vec{w} = (1, 2, 5)$

(b) $\vec{v} = (-1, 1, k),\ \vec{w} = (1, -1, 1)$

(c) $\vec{v} = (-k, -1, -1),\ \vec{w} = (3, 0, 1)$

(d) $\vec{v} = (k, 1, k),\ \vec{w} = (-2, k, -k)$

5. Determine $\vec{v} \times \vec{w}$, se:

(a) $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 2, -1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-5, 3, 1)$
(b) $\vec{\mathbf{v}} = (-1, -2, -1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (1, -2, -6)$
(c) $\vec{\mathbf{v}} = (2, -2, -2)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 2, 1)$
(d) $\vec{\mathbf{v}} = (1, 1, -8)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-2, -3, -1)$
(e) $\vec{\mathbf{v}} = (5, -2, -6)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-8, 3, -2)$
(f) $\vec{\mathbf{v}} = (0, 1, -1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (3, 2, 6)$
(g) $\vec{\mathbf{v}} = (1, 1, 1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (0, 3, 0)$
(h) $\vec{\mathbf{v}} = (-1, -1, -1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (7, -3, 2)$
(i) $\vec{\mathbf{v}} = (4, -2, -1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (1, 0, 1)$
(j) $\vec{\mathbf{v}} = (-6, -4, 1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-2, 2, 0)$
(k) $\vec{\mathbf{v}} = (0, 1, -1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (2, 0, 1)$
(l) $\vec{\mathbf{v}} = (1, 0, 1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (3, 2, 1)$
(m) $\vec{\mathbf{v}} = (3, 1, 2)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-6, 2, -1)$
(n) $\vec{\mathbf{v}} = (1, 4, 2)$, $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 2, -1)$
(o) $\vec{\mathbf{v}} = (1/3, 2, 1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (4, 2/4, 3)$
(p) $\vec{\mathbf{v}} = (1/2, 1, 3/5)$, $\vec{\mathbf{w}} = (4/3, 2, -1/5)$

6. Determine o valor de k tais que os seguintes vetores sejam coplanares:

(a) $\vec{\mathbf{u}} = (1, 2, -3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, k, 1)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (3, 2, 1)$
(b) $\vec{\mathbf{u}} = (-1, k, 2)$, $\vec{\mathbf{v}} = (3, 2, 5)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 0, 1)$
(c) $\vec{\mathbf{u}} = (1, k, 0)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, 2, 1)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (1, 0, k)$
(d) $\vec{\mathbf{u}} = (0, 1, -1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (k, 0, 1)$ e $\vec{\mathbf{w}} = (1, 1, 2\,k)$

7. Determine a área do triângulo PQR, se:

(a) $P = (1, -1, 2)$, $Q = (0, 3, -1)$, $R = (3, -4, 1)$
(b) $P = (-3, 0, 5)$, $Q = (2, -1, -3)$, $R = (4, 1, -1)$
(c) $P = (4, 0, 0)$, $Q = (0, 5, 0)$, $R = (0, 0, 2)$
(d) $P = (-1, 2, 0)$, $Q = (0, 2, -3)$, $R = (5, 0, 1)$

8. Determine o volume do paralelepípedo formado por $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PT}$:

(a) $P = (0, 0, 0)$, $Q = (1, -1, 2)$, $R = (0, 3, -1)$, $T = (3, -4, 1)$
(b) $P = (2, 1, -1)$, $Q = (3, 0, 2)$, $R = (4, -2, 1)$, $T = (5, -3, 0)$

9. Determine $d(P_1P_2)$, se:

(a) $P_1 = (1, 2, 1),\ P_2 = (-5, 3, 1)$
(b) $P_1 = (-3, 2, -1),\ P_2 = (15, 2, 6)$
(c) $P_1 = (12, 222, 1),\ P_2 = (5, 23, 11)$
(d) $P_1 = (4, 24, 18),\ P_2 = (-25, 23, 11)$
(e) $P_1 = (9, 3, 1),\ P_2 = (9, -3, 2)$
(f) $P_1 = (0, 12, -11),\ P_2 = (5, 2, 16)$
(g) $P_1 = (1, 1, 1),\ P_2 = (5, 3, 0)$
(h) $P_1 = (1, 1, -1),\ P_2 = (7, 3, 1)$
(i) $P_1 = (14, -12, 11),\ P_2 = (-1, 9, -1)$
(j) $P_1 = (-6, -4, 1),\ P_2 = (-2, 2, -6)$
(k) $P_1 = (4, -2, -6),\ P_2 = (4, -9, 4)$
(l) $P_1 = (2, -4, 5),\ P_2 = (2, -2, -4)$
(m) $P_1 = (9, -3, 2),\ P_2 = (6, 9, 1)$
(n) $P_1 = (9, 0, 5),\ P_2 = (-5, 2, 1)$

10. Verifique que para todo $\vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^n$; tem-se:

(a) $|\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}| \leq \|\vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{w}}\|$
(b) $\|\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}\| \leq \|\vec{\mathbf{v}}\| + \|\vec{\mathbf{w}}\|$
(c) $2\,\|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + 2\,\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2$
(d) $\|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2$
(e) $4\,\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}\|^2$

11. Sejam $P_1 = (2, 9, 8)$, $P_2 = (6, 4, -2)$ e $P_3 = (7, 15, 7)$. Verifique que $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ são ortogonais e determine um ponto P tal que P_1, P_2, P e P_3 formem um retângulo.

12. Sejam $P_1 = (5, 0, 7)$ e $P_2 = (2, -3, 6)$. Determine o ponto P sobre a reta que liga P_1 a P_2 tal que $\overrightarrow{P_1P} = 3\,\overrightarrow{PP_2}$.

13. Determine a equação do plano passando pelos pontos P_1, P_2 e P_3, sendo:

    (a) $P_1 = (-3, 0, 2)$, $P_2 = (6, 1, 4)$, $P_3 = (-5, 1, 0)$
    (b) $P_1 = (2, 1, 4)$, $P_2 = (1, -1, 2)$, $P_3 = (4, -1, 1)$
    (c) $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (0, -1, 1)$, $P_3 = (2, -1, -1)$
    (d) $P_1 = (1, -1, 1)$, $P_2 = (1, -1, -1)$, $P_3 = (3, -1, 1)$
    (e) $P_1 = (3, -4, 2)$, $P_2 = (3, 3, -3)$, $P_3 = (2, -5, 2)$
    (f) $P_1 = (2, 3, 1)$, $P_2 = (-3, 2, 6)$, $P_3 = (-4, 2, 5)$
    (g) $P_1 = (1/2, 1/3, -2)$, $P_2 = (1, 1, 1)$, $P_3 = (1/4, 2, -1/5)$
    (h) $P_1 = (1, 1, 2)$, $P_2 = (1/2, -1, 1/3)$, $P_3 = (4/5, 0, 1/5)$

14. Determine a equação do plano passando pelo ponto $P = (3, -1, 2)$, perpendicular à reta determinada por $P_1 = (2, 1, 4)$ e $P_2 = (-3, -1, 7)$. Ache a distância do ponto P ao plano.

15. Verifique que a interseção dos planos $x + y - 2\,z = 1$ e $x + 3\,y - x = 4$ é uma reta. Ache a distância do ponto $P = (1, 0, 1)$ a essa reta.

16. Determine a equação do plano paralelo ao plano $2\,x + 3\,y - 6\,z = 3$ e que passa pelo ponto $P = (1, 1, 1)$.

17. Determine o plano perpendicular à reta $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{2} = z + 1$ e que passa pelo ponto $P = (1, 3, -1)$.

18. Determine a equação do plano perpendicular aos planos $x + 2\,y - 7\,z = 0$ e $x - y - z = 5$ e que passa pela origem.

19. Determine a equação do plano ortogonal ao vetor $(2, 3, 6)$ e que passa pelo ponto $(1, 5, 3)$.

Capítulo 2

SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

2.1 Superfícies

Em $\mathbb{R}^3$ temos dois tipos de objetos de nosso interesse: os sólidos e as superfícies.
De forma intuitiva podemos dizer que os sólidos são os objetos de $\mathbb{R}^3$ que possuem volume e as superfícies são objetos de $\mathbb{R}^3$ que possuem área, mas tem espessura irrelevante.
Para leitores com conhecimentos mais profundos, podemos dizer que um sólido é um objeto de dimensão 3 em $\mathbb{R}^3$ e as superfícies são objetos de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$.
Os sólidos nos permitem modelar, por exemplo, depósitos de combustíveis, turbinas de aviões ou carros. As superfícies nos permitem modelar, por exemplo, folhas de papel, membranas ou lâminas de metal. As definições matemáticas destes objetos estão fora do contexto destas notas e, por isso, ficaremos com estas idéias intuitivas.
Do Cálculo de uma variável, conhecemos os sólidos de revolução. Por exemplo, o sólido de revolução obtido girando em torno do eixo dos y a região limitada pelo gráfico de $(x-b)^2 + y^2 = a^2$, $0 < a < b$. Veja o seguinte desenho:

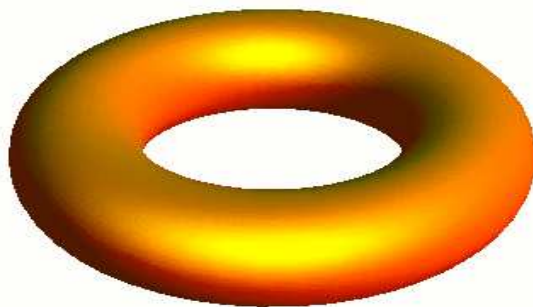



Figura 2.1: Uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Os planos são exemplos de superfícies. A seguir definiremos um novo tipo de superfície: as superfícies quádricas.

2.2 Superfícies Quádricas

Sabemos que o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação geral do segundo grau nas variáveis x e y é uma seção cônica: parábola, elipse, hipérbole ou alguma forma degenerada dessas curvas, como um ponto ou um par de retas. Em $\mathbb{R}^3$, a equação geral do segundo grau nas variáveis x, y e z é $F(x, y, z) = 0$, onde:

$$F(x, y, z) = A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 + D\,x\,y + E\,x\,z + F\,y\,z + G\,x + H\,y + I\,z + J,$$

onde os coeficientes dos termos de segundo grau não são todos nulos, de modo que o grau da equação é 2. O subconjunto $\mathbf{Q} \subset \mathbb{R}^3$, definido por:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, F(x, y, z) = 0\}}$$

é chamado superfície quádrica ou quádrica central.

Usando rotações e translações é possível mostrar que existem os seguintes tipos de superfícies quádricas não degeneradas:

1) **Elipsóides.**

2) **Hiperbolóide elítico ou de uma folha.**

3) **Hiperbolóide de duas folhas.**

4) **Parabolóide elítico.**

5) **Parabolóide hiperbólico.**

6) **Cones.**

7) **Cilindros.**

Observações 2.1.

1. Apresentaremos as equações que definem as quádricas centradas na origem. As outras formas mais gerais podem ser determinadas a partir de translações e rotações.

2. Uma forma básica de esboçar uma superfície quádrica é determinar os interseptos com os eixos coordenados e desenhar suas seções retas, ou seja, as interseções da superfície com os planos coordenados, também chamadas traços da quádrica. As quádricas centrais apresentam simetrias em relação a cada um dos planos coordenados.

3. Se na equação que define a quádrica substituimos x por $-x$ e a equação não se altera, a quádrica é simétrica em relação ao plano yz; se substituimos y por $-y$ e a equação não se altera, a quádrica é simétrica em relação ao plano xz; se substituimos z por $-z$ e a equação não se altera, a quádrica é simétrica em relação ao plano xy e se substituimos (x, y, z) por $(-x, -y, -z)$ e a equação não se altera, a quádrica é simétrica em relação à origem

2.3 Elipsóide

A equação que representa o elipsóide de centro na origem é:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,}$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ não são nulos.

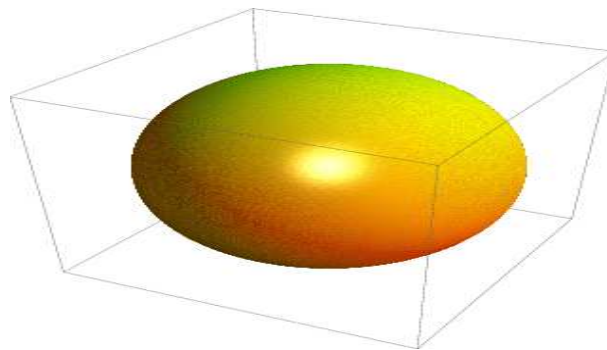



Figura 2.2: O elipsóide.

Interseções com os eixos coordenados:

Não difícil ver que:

$$(\pm a, 0, 0),\ (0, \pm b, 0) \text{ e } (0, 0, \pm c)$$

são as interseções com os eixos coordenados.

Simetrias:

A equação não se altera se substituimos (x, y, z) por $(-x, -y, -z)$; logo, o elipsóide tem simetria em relação à origem.

Traços do elipsóide:

No plano xy é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

No plano yz é a elipse:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

No plano xz é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

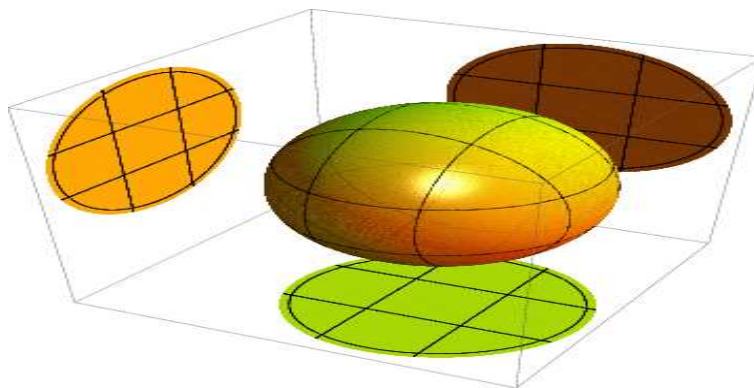



Figura 2.3: O elipsóide e seus traços.

2.3.1 Esferas

Em particular se $a = b = c$, na equação do elipsóide, temos:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = a^2}$$

equação que representa a esfera de centro na origem e raio a.

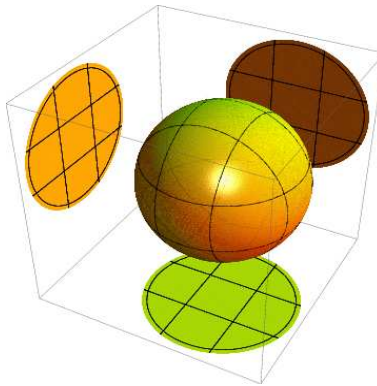



Figura 2.4: A esfera e seus traços.

Em geral, a equação do elipsóide centrado no ponto (x_0, y_0, z_0) é:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1}$$

Em particular, a equação que representa a esfera de centro em (x_0, y_0, z_0) e raio a é:

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = a^2}$$

2.4 Hiperbolóide de uma folha

A equação que representa o hiperbolóide de uma folha de centro na origem é:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ não são nulos.

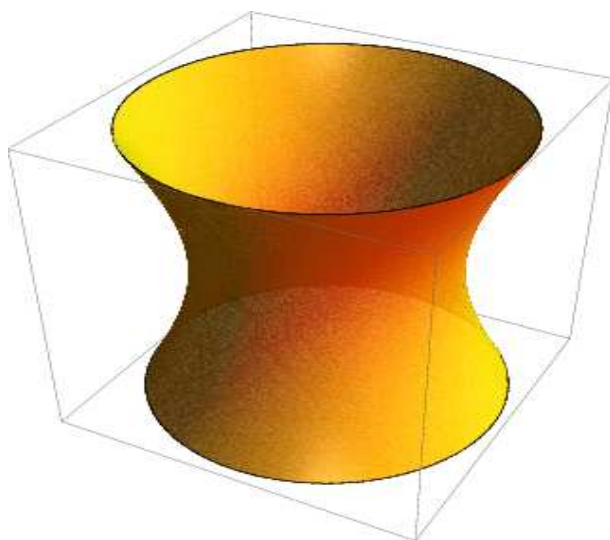



Figura 2.5: Hiperbolóide de uma folha.

Interseções com os eixos coordenados:

Não difícil ver que:

$$(\pm a, 0, 0) \quad \text{e} \quad (0, \pm b, 0).$$

são as interseções com os eixos coordenados.

Simetrias:

Na equação não se altera se substituimos (x, y, z) por $(-x, -y, -z)$; logo, o hiperbolóide tem simetria em relação à origem.

Traços do hiperbolóide de uma folha:

No plano xy é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

No plano yz é a hipérbole:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

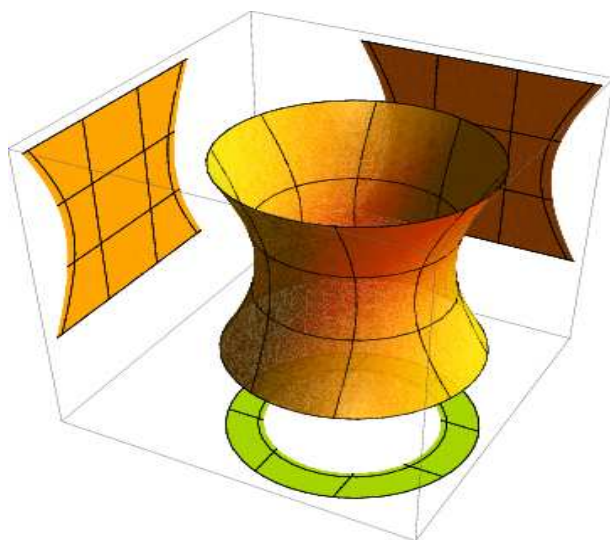
No plano xz é a hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Figura 2.6: Hiperbolóide de uma folha e seus traços.

As equações:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

representam também hiperbolóides de uma folha. No primeiro caso o eixo do hiperbolóide é o eixo dos y e no segundo caso o eixo dos x. O termo negativo na equação indica o eixo do hiperbolóide.

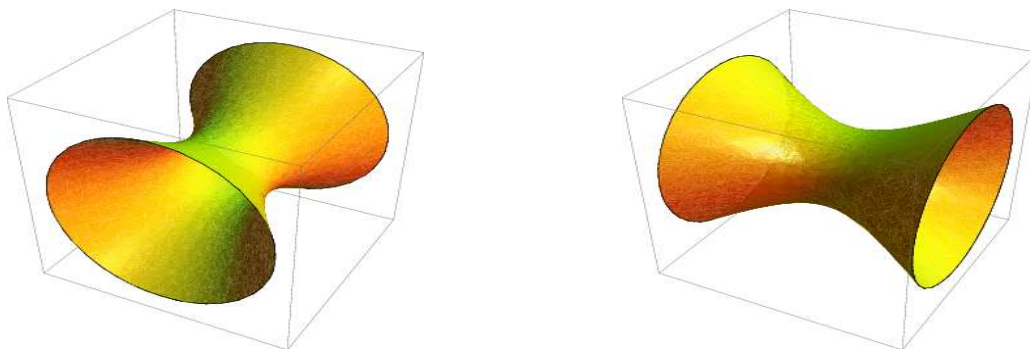



Figura 2.7: Outros hiperbolóides de uma folha.

2.5 Hiperbolóide de duas folhas

A equação que representa o hiperbolóide de duas folhas de centro na origem é:

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ não são nulos.

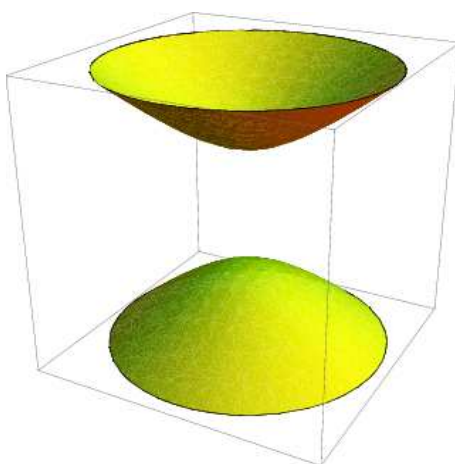



Figura 2.8: Hiperbolóide de duas folhas.

Interseções com os eixos coordenados:

Não difícil ver que:

$$(0, 0, c) \quad \text{e} \quad (0.0 - c),$$

são as interseções com os eixos coordenados.

Simetrias:

A equação não se altera se substituimos (x, y, z) por $(-x, -y, -z)$; logo, o hiperbolóide de duas folhas tem simetria em relação à origem.

Traços do hiperbolóide de duas folhas:

No plano xy: nenhuma.

No plano yz é a hipérbole:

$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

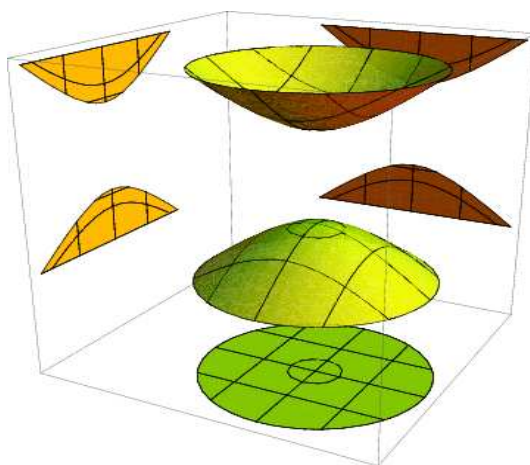
No plano xz é a hipérbole:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Figura 2.9: Hiperbolóide de duas folhas e seus traços.

As equações:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

representam também hiperbolóides de duas folhas. No primeiro caso o eixo do hiperbolóide é o eixo dos x e no segundo caso o eixo dos y. O termo positivo na equação indica o eixo do hiperbolóide.

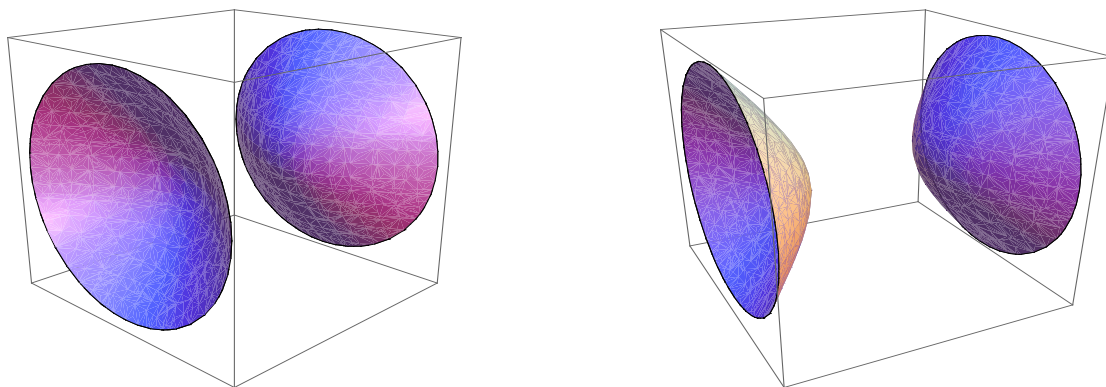



Figura 2.10: Outros hiperbolóides de duas folhas.

2.6 Parabolóide Elítico

A equação que representa o parabolóide elítico de centro na origem é:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0}$$

onde a, b, $c \in \mathbb{R}$ não são nulos. Para $c > 0$, as parábolas tem a concavidade voltada para cima. Para $c > 0$, o parabolóide "abre"para cima. De forma análoga, se $c < 0$, o parabolóide "abre"para baixo.

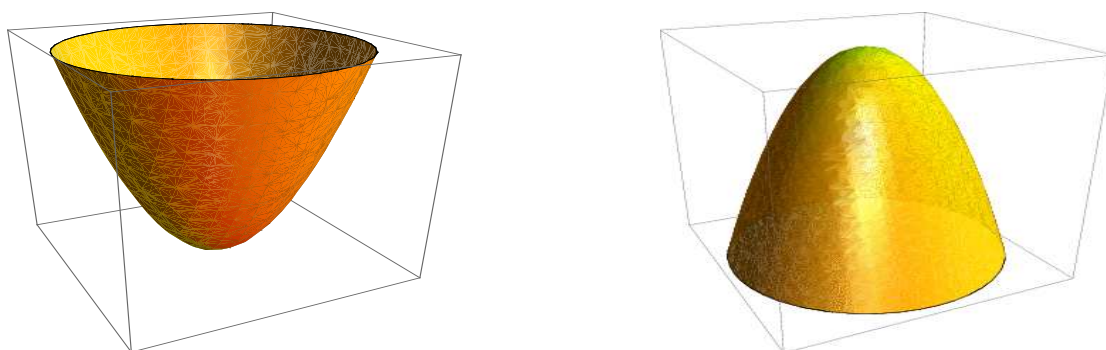



Figura 2.11: Parabolóides elíticos.

Interseções com os eixos coordenados:

$(0, 0, 0)$ é o único ponto de interseção.

Simetrias:

a equação não se altera se substituimos x e y por $-x$ e $-y$; logo, o parabolóide tem simetria em relação aos planos yz e xz.

Traços do parabolóide elítico:

No plano xy: o ponto $(0, 0, 0)$.

No plano yz é a parábola:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0.$$

No plano xz é a parábola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z}{c} = 0.$$

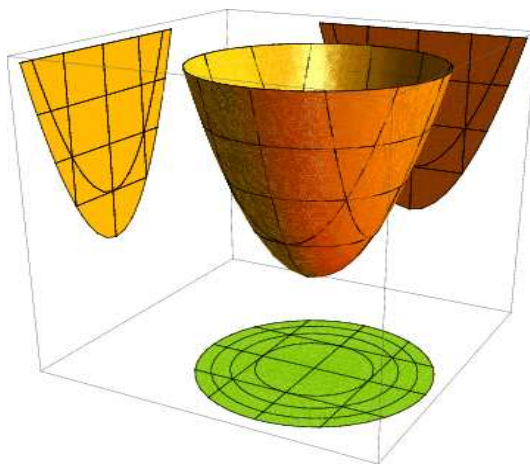



Figura 2.12: Parabolóide elítico e seus traços.

2.7 Parabolóide Hiperbólico

A equação que representa o parabolóide hiperbólico de centro na origem é:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0}$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ não são nulos. Para $c < 0$, as parábolas (traços no plano yz e xz) tem a concavidade voltada para baixo.

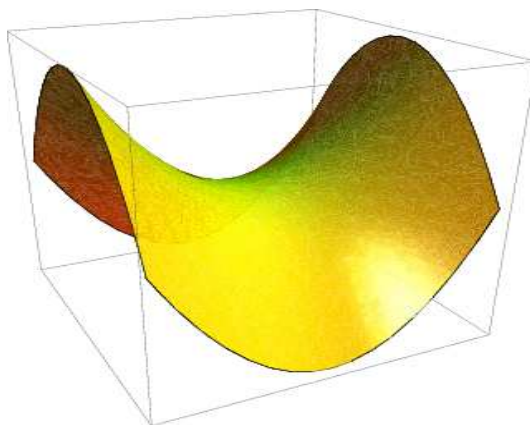



Figura 2.13: Parabolóide hiperbólico.

Interseções com os eixos coordenados:

$(0, 0, 0)$ é o único ponto de interseção.

Simetrias:

a equação não se altera se substituimos x e y por $-x$ e $-y$; logo, o parabolóide hiperbólico tem simetria em relação aos planos yz e xz.

Traços do parabolóide hiperbólico:

No plano xy: é um par de retas que se intersectam na origem.

No plano yz é a parábola:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 0.$$

No plano xz é a parábola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z}{c} = 0.$$

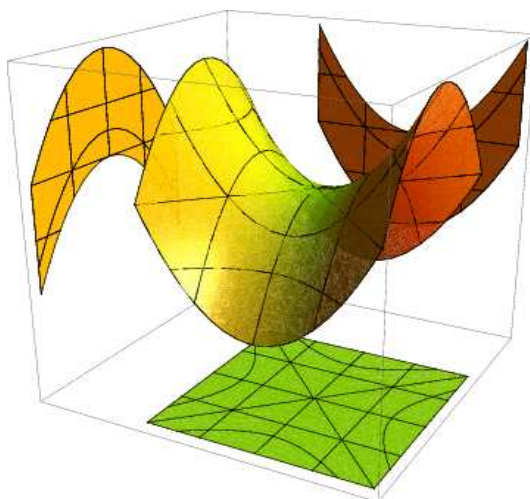



Figura 2.14: Parabolóide hiperbólico e seus traços.

2.8 Cone Elítico

A equação que representa o cone elítico de centro na origem é:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}$$

onde $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ não são nulos.

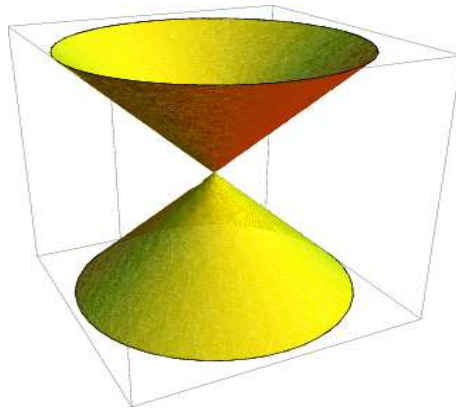



Figura 2.15: Cone elítico.

Interseções com os eixos coordenados:

$(0, 0, 0)$ é o único ponto de interseção.

Simetrias:

a equação não se altera se substituimos (x, y, z) por $(-x, -y, -z)$; logo, o cone elítico tem simetria em relação à origem.

Traços do cone elítico:

No plano xy é a origem.

No plano yz:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

duas retas que se intersectam na origem.

No plano xz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

duas retas que se intersectam na origem.

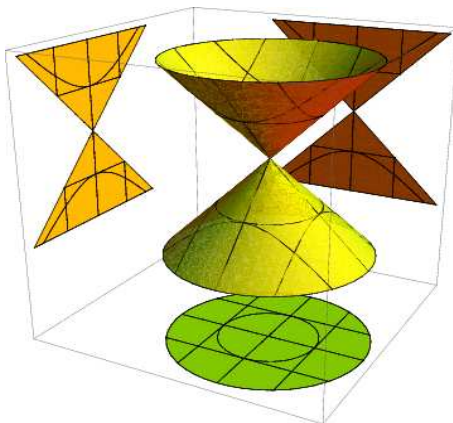



Figura 2.16: Cone elítico e seus traços.

O traço em um plano $z = k$ paralelo ao plano xy tem a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2},$$

que representa uma elipse.

2.9 Cilindros

Se C é uma curva plana e L é uma reta não situada no mesmo plano da curva, então o conjunto de todas as retas paralelas a L e que intersectam C é chamado cilindro.

A curva C é dita diretriz do cilindro e cada reta que passa por C paralela a L é chamada geratriz do cilindro. De acordo com a observação, o cilindro de geratrizes paralelas ao eixo dos z e tendo como diretriz uma elipse no plano xy centrada na origem, tem equação:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

e é chamado cilindro elítico. ($a,\ b$ não são nulos).

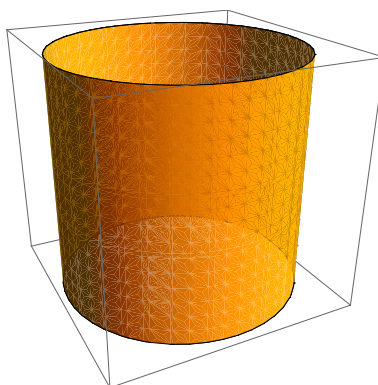



Figura 2.17: Cilindro elítico.

Se por exemplo a equação é:

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0}$$

obtemos o chamado cilindro parabólico. (b, c não são nulos). Desenho à esquerda. Se por exemplo a equação é:

$$\boxed{\frac{y^3}{b^2} - \frac{z}{c} = 0}$$

obtemos o chamado cilindro cúbico. (a, c não são nulos). Desenho à direita.

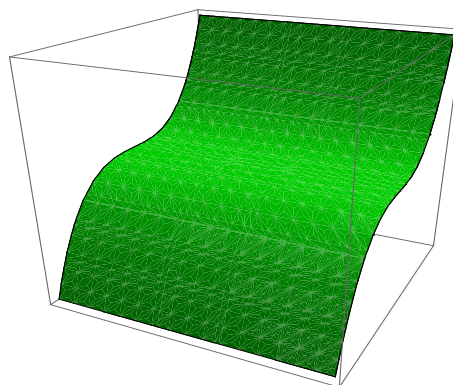
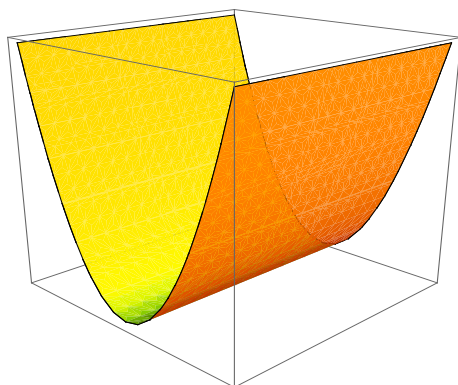



Figura 2.18: Cilindro parabólico e cúbico, respectivamente.

Em geral, se na equação que descreve uma quádrica falta uma variável, ela representa um cilindro, com geratrizes paralelas à variável que falta.

Exemplo 2.1.

[1] Ache a natureza da quádrica $9\,x^2-18\,x+9\,y^2+4\,z^2+16\,z-11=0$. Completando os quadrados:

$$9\,x^2-18\,x+9\,y^2+4\,z^2+16\,z-11=\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{(z+2)^2}{9}-1;$$

a equação representa um elipsóide centrado no ponto $(1,0,-2)$.

[2] Determine a equação da esfera concêntrica à esfera

$$x^2+y^2+z^2+4x+2y-6z+10=0$$

e que passa pelo ponto $(-4,2,5)$.

Como as esferas são concêntricas, completamos os quadrados para determinar o centro da esfera dada: $x^2+y^2+z^2+4x+2y-6z+10=(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2-4$; então, o centro é $(-2,-1,3)$ e a equação é $(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=a^2$. Para determinar a usamos o fato de que o ponto $(-4,2,5)$ pertence à esfera; logo $a^2=17$. A equação é:

$$(x+2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=17.$$

[3] Verifique que a interseção do parabolóide hiperbólico $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{z}{c}$ com o plano $z=b\,x+a\,y$ é formada por duas retas. Para determinar a interseção, devemos resolver o sistema de equações :

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2} &= \frac{z}{c}\\ b\,x+a\,y &= z.\end{cases}$$

Igualando as equações por z: $\left[\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{a\,y}{c}\right]-\left[\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{b\,x}{c}\right]=0$; completando os quadrados:

$$\frac{1}{b^2}\left[y-\frac{ab^2}{2c}\right]g^2-\frac{1}{a^2}\left[x+\frac{a^2b}{2c}\right]^2=\frac{1}{b^2}\left[\left[y-\frac{a\,b^2}{2\,c}\right]^2-\left[\frac{b\,x}{a}+\frac{a\,b^2}{2\,c}\right]^2\right]=0;$$

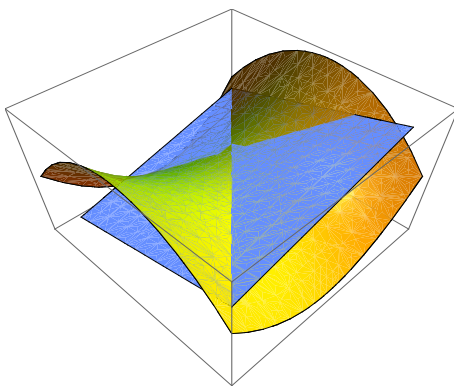



Figura 2.19: Exemplo [3].

logo:

$$y - \frac{a\,b^2}{2\,c} = \pm\left[\frac{b\,x}{a} + \frac{a\,b^2}{2\,c}\right].$$

[4] Determine a equação da superfície formada pelo conjunto dos pontos P equidistantes do plano $x - 2 = 0$ e do ponto $(-2, 0, 0)$. Identifique a superfície.

Sejam d_2 a distância do ponto P ao plano $x - 2 = 0$ e d_0 a distância do ponto P ao ponto $(-2, 0, 0)$; logo, $d_2 = |x - 2|$ e $d_0 = \sqrt{(x + 2)^2 + y^2 + z^2}$. Como $d_0 = d_2$, temos:

$$x = -\frac{(y^2 + z^2)}{8}.$$

A superfície é um parabolóide elítico.

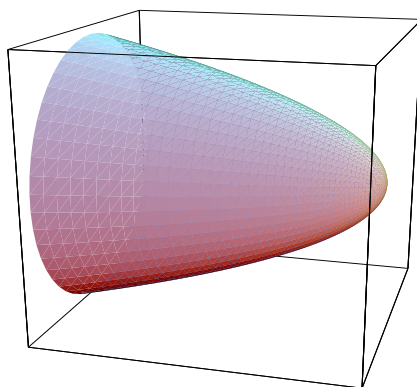



Figura 2.20: Exemplo [4].

[5] Determine a equação da superfície formada pelo conjunto dos pontos P equidistantes das retas L_1, que passa pela origem na direção $(1, 0, 0)$ e, L_2 que passa pelo ponto $(0, 1, 0)$ na direção $(0, 0, 1)$. Identifique a superfície.

Sejam $d_1(P, L_i)$ as distâncias do ponto P às retas L_i ($i = 1,\, 2$); como: $d_1(P, L_1) = d_1(P, L_2)$, temos:

$$y = \frac{(x^2 - z^2)}{2}.$$

A superfície é um parabolóide hiperbólico.

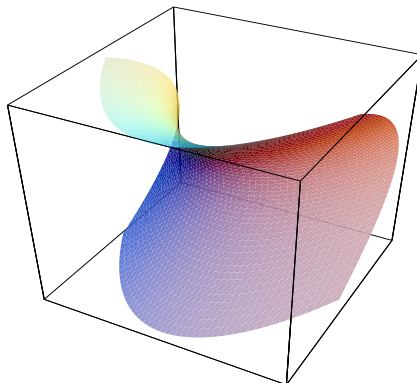



Figura 2.21: Exemplo [5].

[6] Mostre que se o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ pertence ao parabolóide hiperbólico definido por $z = y^2 - x^2$, então, as retas L_1 que passa pelo ponto P_0 na direção $(1, 1, 2\,(y_0 - x_0))$ e L_2 que passa pelo ponto P_0 na direção $(-1, -1, -2\,(y_0 - x_0))$ estão contidas no parabolóide hiperbólico. Consideremos a reta L_1. Temos:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \\ y(t) = y_0 + t \\ z(t) = z_0 + 2\,t\,(y_0 - x_0); \end{cases}$$

logo, $y(t)^2 - x(t)^2 = (y_0^2 - x_0^2) + 2\,t\,(y_0 - x_0) = z_0 + 2\,t\,(y_0 - x_0) = z(t)$. Para L_2 o procedimento é análogo.

Os objetos sólidos do $\mathbb{R}^3$ que utilizaremos neste texto são definidos através de inequações.

Exemplo 2.2.

[1] $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d,\, p \leq z \leq q\} = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. O conjunto R representa um paralelepípedo retangular.

[2] $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\, r > 0\}$. O conjunto B representa uma bola sólida de centro na origem e raio r ou o conjunto de todos os vetores de norma menor ou igual a r.

[3] $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq r^2, \, 0 \leq z \leq h, \, h > 0\}$. O conjunto C é uma porção do cilindro circular reto de altura h e raio r.

[4] F é o sólido obtido pela revolução de uma região do plano fechada e limitada por uma curva:

Figura 2.22: Sólido em $\mathbb{R}^3$.

Note que todos estes conjuntos possuem volume.

2.10 Exercícios

1. Determine a natureza das seguintes quádricas:

   (a) $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$

   (b) $z - 4(x^2 + y^2) = 0$

   (c) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$

   (d) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

   (e) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{z^2}{25} - 4y = 0$

   (f) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{z^2}{25} - 9y = 0$

   (g) $x^2 + 16z^2 - 4y^2 + 16 = 0$

   (h) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$

   (i) $x^2 + y^2 = 2\,y$

   (j) $x^2 + y^2 = 4\,x$

2. Utilizando a técnica dos traços, esboce o gráfico de cada quádrica do exercício [1].

3. Determine a natureza da curva obtida pela projeção no plano xy da interseção de :

   (a) $z + x^2 = 1$ e $z - x^2 - y^2 = 0$.

   (b) $x = 2$ e $x = y^2 + z^2$.

   (c) $z = 8 - 5x^2 - 3y^2$ e $z = 3x^2 + 5y^2$.

4. Determine os valores de k tais que a interseção do plano $x + k\,y = 0$ com a quádrica $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ seja uma elipse e uma hipérbole, respectivamente.

5. Verifique que $2x - 2z - y = 10$ intersecta $2z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$ num único ponto e determine o ponto.

6. Determine $a,\ b,\ c$ e d de modo que os pontos dados pertençam à quádrica:

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d = 0,$$

   onde:

(a) $(1, 1, -1)$, $(2, 1, 0)$, $(5, -5, 3)$.

(b) $(2, -1, 1)$, $(-3, 0, 0)$, $(1, -1, -2)$.

(c) $(1, 2, -1)$, $(0, 1, 0)$, $(2, 1, -2)$.

7. Determine a equação da superfície definida pelo conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao eixo dos x é o dobro da distância de P ao plano yz. Identifique a superfície.

8. Determine a equação da superfície definida pelo conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao eixo dos y é $\frac{3}{4}$ da distância de P ao plano xz. Identifique a superfície.

9. Determine a equação da superfície definida pelo conjunto dos pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao ponto $(0, 0, 1)$ é igual à distância de P ao plano $y = -1$. Identifique a superfície.

10. Verifique que o ponto $P = (1, 3, -1)$ pertence ao parabolóide hiperbólico definido por $4\,x^2 - z^2 = y$ e determine as equações das duas retas que passam por P e estão contidas no parabolóide.

Capítulo 3

CONJUNTOS ABERTOS, FECHADOS E FRONTEIRA

3.1 Introdução

Lembremos que nos conceitos estudados no Cálculo de uma variável, os intervalos, fechados, abertos, tem um papel fundamental nas definições e teoremas. A continuação apresentaremos alguns conceitos sobre certos tipos de conjuntos em várias variáveis, que tem um papel análogo aos intervalos em uma variável. Veja [**VM**].

3.2 Bolas Abertas

Definição 3.1. Sejam $r > 0$ e $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. A **bola aberta de centro** $\mathbf{x}_0$ **e raio** r é denotada por $B(\mathbf{x}_0, r)$ e definida por:

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}.$$

Observações 3.1.

1. Se $n = 2$; $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ e $\mathbf{x} = (x, y)$; logo:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

e:

$$\boxed{B(\mathbf{x}_0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}}$$

2. O conjunto $B(\mathbf{x}_0, r)$ é o "interior"de um círculo centrado em (x_0, y_0) e raio r, ou equivalentemente, o conjunto dos vetores no plano de origem em (x_0, y_0) e norma menor que r. Neste caso, o conjunto $B(\mathbf{x}_0, r)$ é chamado disco aberto de centro (x_0, y_0) e raio r.

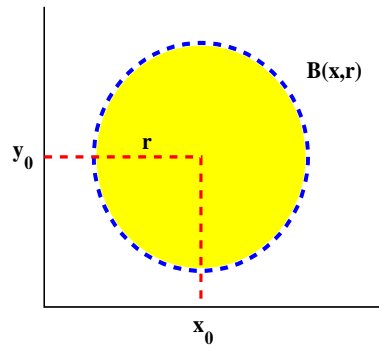



Figura 3.1: Disco aberto.

3. Analogamente, se $n = 3$; $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\mathbf{x} = (x, y, z)$:

$$\boxed{B(\mathbf{x}_0, r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}}$$

4. O conjunto $B(\mathbf{x}_0, r)$ é o "interior"de uma esfera "sólida"centrada em (x_0, y_0, z_0) e raio r, ou equivalentemente, o conjunto dos vetores no espaço de origem em (x_0, y_0, z_0) e norma menor que r.

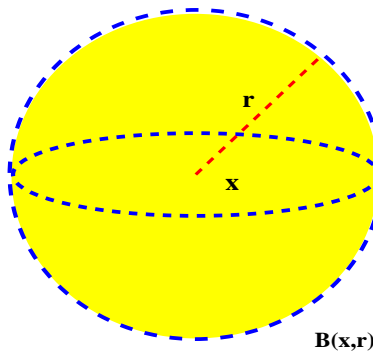



Figura 3.2: Bola aberta.

5. Observe que em ambos os casos a desigualdade é estrita.

3.3 Conjuntos Abertos

Definição 3.2. O conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito aberto em $\mathbb{R}^n$ se para todo $\mathbf{x} \in A$, existe $B(\mathbf{x}, r)$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset A$.

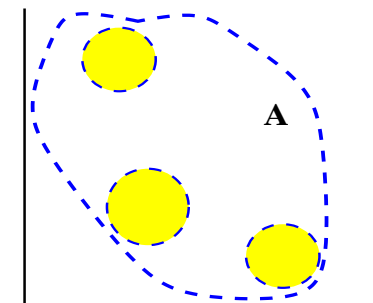



Figura 3.3: Conjunto aberto.

Estes conjuntos são a generalização natural de intervalos abertos em $\mathbb{R}$. Por definição, o conjunto vazio e $\mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.1.

[1] Pela definição, os subconjuntos do tipo $\{\mathbf{x} \,/\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ não são abertos em $\mathbb{R}^n$, pois toda bola ou disco aberto de centro $\mathbf{x}$ não está contido em $\{\mathbf{x}\}$. Em geral, os conjuntos do tipo:

$$\{x_1,\, x_2,\, x_3,\, ...,x_n \,/\, x_i \in \mathbb{R}^n\}$$

não são abertos em $\mathbb{R}^n$.

[2] O conjunto $\mathbb{R}$ "pensado"como a reta $\{(x, 0) \,/\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ não é aberto no plano, pois qualquer disco aberto centrado em $(x, 0)$ não está contido em $\mathbb{R}$.

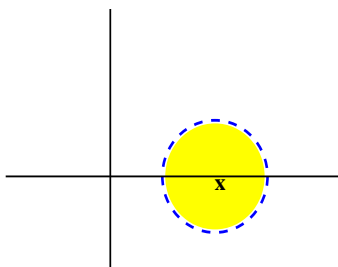



Figura 3.4: Exemplo [2].

[3] O conjunto $A = (a, b) \times (c, d)$ é aberto em $\mathbb{R}^2$.

De fato, para todo $(x, y) \in A$, $a < x < b$ e $c < y < d$, denote por ε o menor número do conjunto $\{|x-a|, |x-b|, |y-c|, |y-d|\}$, onde $|\ |$ é a distância entre números reais. Então, por exemplo, considerando $r = \frac{\varepsilon}{6}$, temos, $B((x, y), r) \subset A$. Logo A é um conjunto aberto.

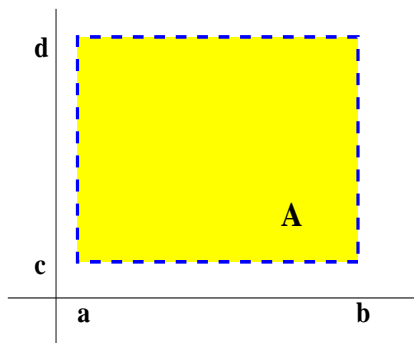



Figura 3.5: Exemplo [3].

[4] O conjunto $A = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ não é aberto no espaço, pois qualquer bola aberta centrada em $(x, y, 0)$ não está contida em $\mathbb{R}^2$.

[5] A bola $B(\mathbf{x}_0, r)$ é um conjunto aberto. De fato, denotando por $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ a distância entre os pontos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, se $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$ então $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r$; tomando $r_1 = r - d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r$, temos: $B(\mathbf{x}, r_1) \subset B(\mathbf{x}_0, r)$.

Observação 3.1. Será útil dar um nome especial para um conjunto aberto que contenha um ponto dado x. A tal conjunto chamaremos de **vizinhança** do ponto x.

3.4 Conjunto Fronteira

Definição 3.3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito ponto da fronteira ou do bordo de A se toda vizinhança de $\mathbf{x}$ intersecta A e $\mathbb{R}^n - A$.

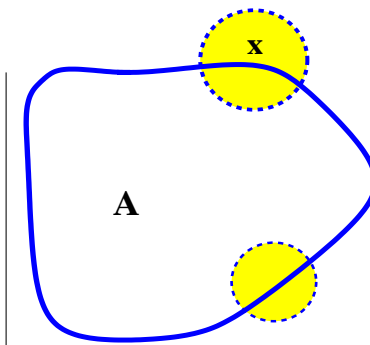



Figura 3.6: Bordo de A.

Denotamos o conjunto dos pontos da fronteira do conjunto A por ∂A.

Observação 3.2. Um conjunto é aberto se $A \cap \partial A = \phi$.

Exemplo 3.2.

[1] Se $A = B(\mathbf{x}, r)$ então $\partial A = \{\mathbf{y}/d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r\}$; logo o conjunto $C = \{\mathbf{y}/d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}$ não é aberto.

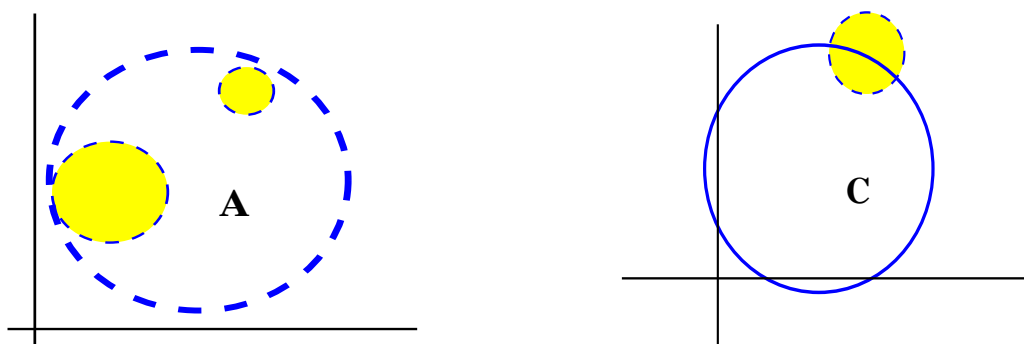



Figura 3.7: Exemplo [2].

[2] Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x > 0\}$; este conjunto corresponde ao primeiro e ao quarto quadrantes sem incluir a reta $x = 0$ e é aberto no plano; de fato, seja $(x, y) \in A$ e escolhamos $r = x > 0$; se $(x_1, y_1) \in B((x, y), r)$ temos:

$$|x - x_1| = \sqrt{(x - x_1)^2} \leq \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} < r = x.$$

Logo $x_1 > 0$ e $B((x, y), r) \subset A$; note que $\partial A = \{(0, y)/y \in \mathbb{R}\}$.

Figura 3.8: Exemplo [2].

3.5 Conjuntos Fechados

Definição 3.4. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado em $\mathbb{R}^n$ se $\partial A \subset A$.

Exemplo 3.3.

[1] $\mathbb{R}^n$ é também um conjunto fechado.

[2] $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 < r^2, \, r > 0\}$ não é fechado, pois sua fronteira é :

$$\partial A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = r^2, \, r > 0\}.$$

Logo $\partial A \not\subset A$.

[3] O sólido $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, \, r > 0\}$ é fechado pois sua fronteira é:

$$\partial W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \, r > 0\}.$$

Logo $\partial W \subset W$. Em geral, todos os sólidos são fechados.

[4] $A = [a, b] \times [c, d]$ é um conjunto fechado, pois ∂A é o retângulo formado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$.

Nos próximos parágrafos apresenteremos uma caracterização mais eficiente dos conjuntos abertos e fechados.

Capítulo 4

CURVAS

4.1 Introdução

Definição 4.1. *Seja $m > 1$. Uma função*

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

é uma regra que associa a cada $\mathbf{u} \in A$ um único vetor $F(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^m$.

O conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ onde F é definida é chamado **domínio** de F e é denotado por $Dom(F)$. O conjunto $\{F(\mathbf{u}) \,/\, u \in Dom(F)\} \subset \mathbb{R}^m$ é chamado **imagem** de F e é denotado por $F(A)$.

Uma função $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ define m funções reais

$$F_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

chamadas **funções coordenadas** de F; logo, $F = (F_1, F_2, ..., F_m)$ e:

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_1 + F_2(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_2 + ... + F_n(\mathbf{x})\,\mathbf{e}_n,$$

onde $\{\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, ...,\mathbf{e}_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. A função $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua, diferenciável ou de classe C^k em $\mathbf{u} \in A$ se cada uma de suas componentes F_i, é função contínua, diferenciável ou de classe C^k em $\mathbf{u} \in A$, respectivamente.

Exemplo 4.1.

[1] Para descrever a velocidade do ar numa certa região do espaço, utilizamos uma função $F : A \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y, z, t) \in A$, onde (x, y, z) é a posição do ponto no espaço e t o tempo; logo, $F(A)$ corresponde a velocidade do ponto (x, y, z) no instante t.

[2] Seja $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x,y) = (k\,x, k\,y)$, $(k \neq 0)$. A função F tem como funções coordenadas:

$$F_1,\ F_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

onde $F_1(x,y) = k\,x$ e $F_2(x,y) = k\,y$, ambas diferenciáveis; logo, F é diferenciável. Consideremos:

$$F : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$;.

Sejam $(x,y) \in A$ e $u = k\,x$ e $v = k\,y$, então o par (u,v) satisfaz à relação: $u^2 + v^2 \leq k^2$. Então, $F(A)$ é um disco fechado de raio k.

Este tipo de função é chamada de dilatação de fator k, se $k > 1$ e contração de fator k, se $0 < k < 1$.

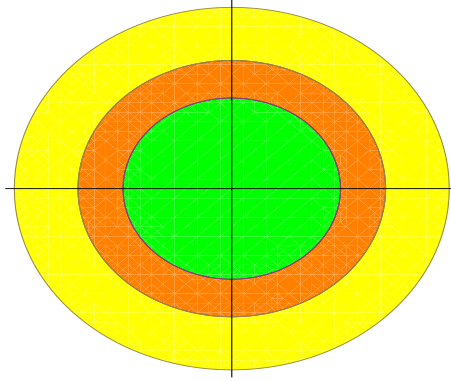



Figura 4.1: A região A para diferentes k.

[3] Seja $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $F(x,y,z) = (x,y)$. Esta função é chamada projeção e é tal que $F(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.

[4] Seja $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(x,y) = (x,y,0)$. Esta função é chamada de inclusão e é tal que $F(\mathbb{R}^2)$ é o plano xy em $\mathbb{R}^3$.

[5] Seja $F : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(x,y) = (x\,cos(y), x\,sen(y), y)$, onde o domínio de F é a faixa $A = [0,+\infty) \times [0, 6\,\pi]$.

A imagem por F do segmento de reta $x = a$, $a \in [0,+\infty)$ para $0 \leq y \leq 6\,\pi$ é a curva:

$$\begin{cases} u = a\,cos(y) \\ v = a\,sen(y) \\ w = y; \quad 0 \leq y \leq 6\,\pi. \end{cases}$$

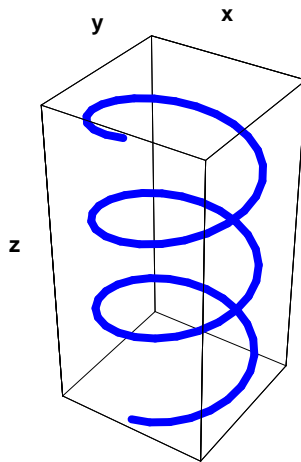



Figura 4.2: Exemplo [5].

[6] Seja o quadrado $D^* = [0,1] \times [0,1]$ e $T(u,v) = (u+v, u-v)$. Determinemos $T(D^*)$.

Fazendo:

$$\begin{cases} x &= u+v \\ y &= u-v, \end{cases}$$

se $u = 0$, então $y = -x$, se $v = 0$, então $y = x$; se $u = 1$, então $y = 2 - x$ e se $v = 1$, então $y = x - 2$. A região $D = T(D^*)$ é a região do plano xy limitada pelas curvas $y = x$, $y = -x$, $y = x - 2$ e $y = 2 - x$.

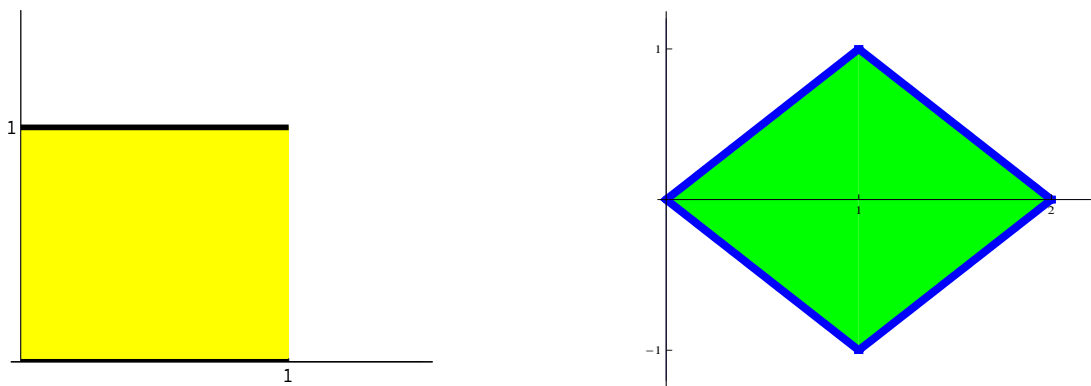



Figura 4.3: Gráficos de D^* e D, respectivamente.

[7] Seja D^* a região limitada pelas curvas $u^2 - v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = 9$, $u\,v = 1$ e $u\,v = 4$ no primeiro quadrante, sendo $T(u,v) = (u^2 - v^2, u\,v)$. Determinemos $T(D^*) = D$.

Fazendo:

$$\begin{cases} x = & u^2 - v^2 \\ y = & u\,v; \end{cases}$$

se $u^2 - v^2 = 1$, então $x = 1$; se $u^2 - v^2 = 9$, então $x = 9$, se $u\,v = 1$, então $y = 1$ e se $u\,v = 4$, então $y = 4$; logo D é a região limitada por estas retas (T é injetiva):

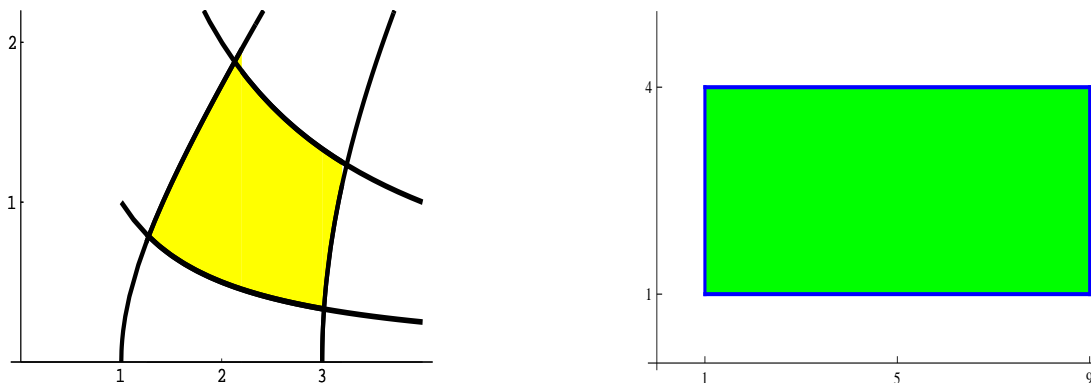



Figura 4.4: As regiões D^* e D, respectivamente.

Nosso interesse nestas notas é estudar com alguma profundidade as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. As primeiras são chamadas curvas ou caminhos e as segundas campos de vetores.

4.2 Curvas Parametrizadas

É intuitivo pensar que uma curva no plano ou espaço pode ser considerada como a trajetória de uma partícula móvel que se desloca no plano ou no espaço durante um intervalo de tempo. Uma forma de estudar tais trajetórias consiste em determinar as coordenadas de um ponto da curva em função de um só parâmetro, como por exemplo, o tempo t. Podemos descrever tais curvas através de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$. Esta descrição é chamada forma paramétrica da curva.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo ou uma reunião de intervalos.

Definição 4.2. *Uma curva parametrizada γ em $\mathbb{R}^n$ é uma função que associa a cada número real $t \in I$ um único vetor $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ e é denotada por:*

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

A curva $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$; logo, as funções coordenadas de γ são:

$$x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

A imagem $C = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ é dita trajetória ou traço da curva γ e é definida como o lugar geométrico de todos os pontos $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ tais que $t \in I$.

Deve-se ter cuidado para não confundir a curva parametrizada, que é uma função com o seu traço, que é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Se C é uma curva parametrizada por $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, então as equações:

$$\begin{cases} x = & x(t) \\ y = & y(t) \\ z = & z(t), \end{cases}$$

$t \in I$, constituem a representação paramétrica de γ. t é dito parâmetro da curva. Analogamente se a curva está definida em $\mathbb{R}^2$.

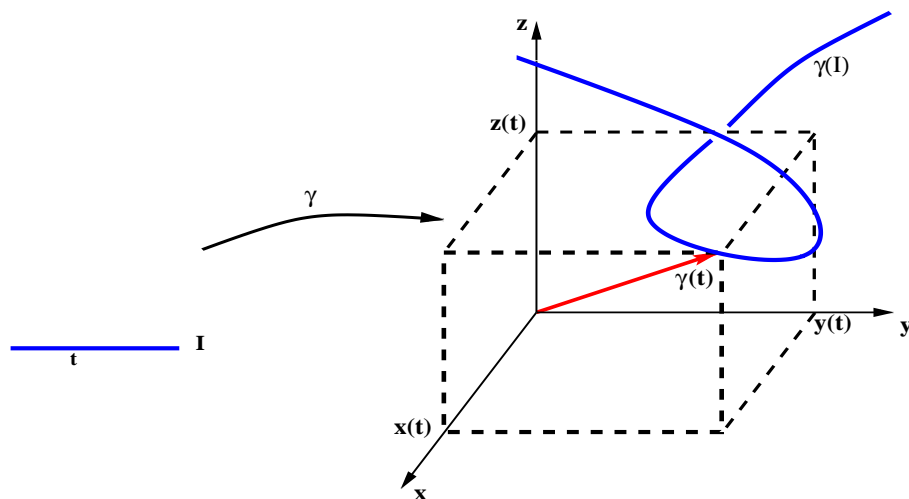



Figura 4.5: Curva parametrizada.

Exemplo 4.2.

[1] A circunferência C de raio $a > 0$ centrada na origem tem a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} x(t) = & a\,cos(t) \\ y(t) = & a\,sen(t),\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

De fato, se $P = (x, y)$ e t é o ângulo que o segmento de reta que liga a origem e P forma com o eixo dos x, sabemos da trigonometria que

$$sen(t) = \frac{y}{a} \quad \text{e} \quad cos(t) = \frac{x}{a};$$

logo, $x^2 + y^2 = a^2$. Observe que $\|\gamma(t)\| = a$ é constante para todo $t \in [0, 2\,\pi]$ e $\gamma(0) = \gamma(2\,\pi)$.

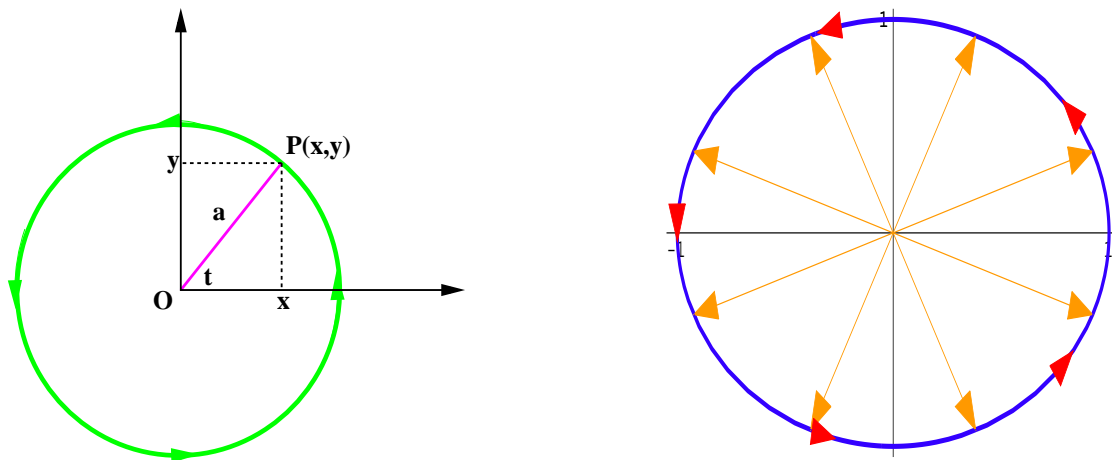



Figura 4.6: A seta indica o sentido da parametrização.

[2] Seja C a curva parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\,cos(t) \\ y(t) = e^{-t}\,sen(t),\; t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

O vetor posição tem comprimento variável $\|\gamma(t)\| = e^{-t}$; logo:

$$\lim_{t \to +\infty} \|\gamma(t)\| = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to -\infty} \|\gamma(t)\| = +\infty.$$

A curva não "fecha"como no exemplo anterior, pois $\gamma(0) = (1,0)$ e $\gamma(2\,\pi) = e^{-2\pi}(1,0)$. Esta curva é uma espiral.

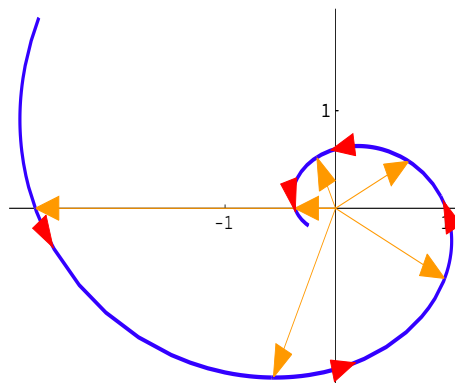



Figura 4.7:

Inicialmente, para esboçar a trajetória das curvas pode-se fazer uma tabela com entrada t e saídas x e y, que são marcadas no plano para determinar aproximadamente o esboço.

[3] Seja C a curva parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = & 3\,t^2 \\ y(t) = & 4\,t^3,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Fazendo a tabela:

t	x	y
0	0	0
0.5	0.75	0.5
-0.5	0.75	-0.5
1	3	4
-1	3	-4
2	12	32
-2	12	-32

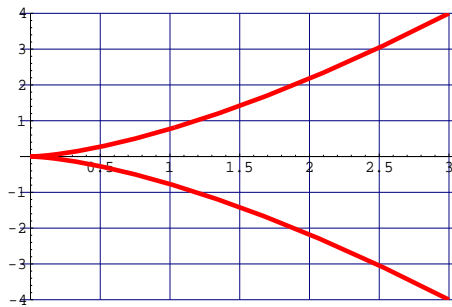



Figura 4.8: O traço da curva no plano xy.

[4] A parametrização da reta, em $\mathbb{R}^3$, que passa pelo ponto $\mathrm{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção de $\vec{\mathrm{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ é:

$$\begin{cases} x(t) = & x_0 + t\,v_1 \\ y(t) = & y_0 + t\,v_2 \\ z(t) = & z_0 + t\,v_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

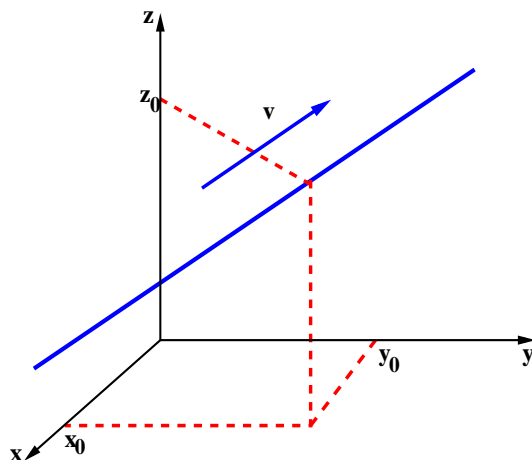



Figura 4.9: Reta na direção $\vec{\mathbf{v}}$.

Analogamente, a parametrização da reta em $\mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ e na direção de $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ é:

$$\begin{cases} x(t) = & x_0 + t\, v_1 \\ y(t) = & y_0 + t\, v_2, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[5] Seja $y = f(x)$ uma função real; fazendo $x = t$ podemos escrever o gráfico de f na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & f(t), \quad t \in Dom(f). \end{cases}$$

Logo, todos os gráficos conhecidos de funções do cálculo de uma variável podem ser escritos na forma paramétrica. Por exemplo, a família de curvas $y = e^{bx}\, cos(a\, x)$, $a,\ b \in \mathbb{R}$ é parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = e^{bt}\, cos(a\, t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

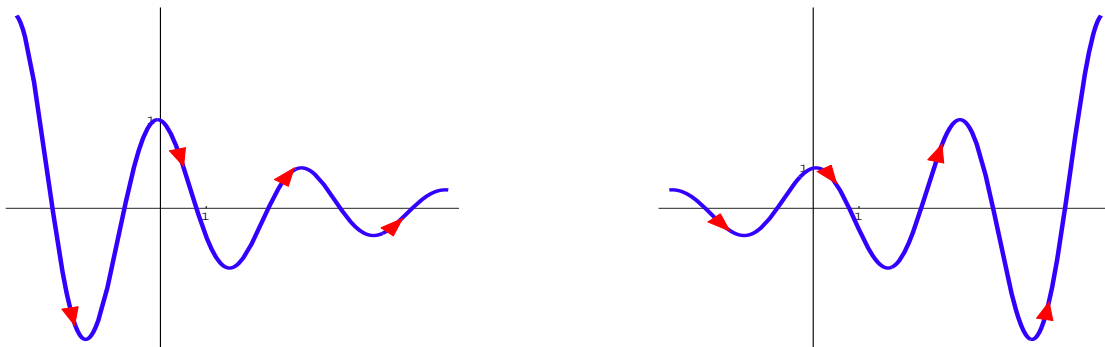



Figura 4.10: Desenhos para $b < 0$ e $b > 0$, respectivamente.

4.3 Parametrização das Cônicas

4.3.1 Elipse

A equação da elipse centrada em $(0,0)$ é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a,\, b \neq 0$$

Considere os círculos $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$ tal que $b < a$. Seja $P = (x, y)$ um ponto na elipse:

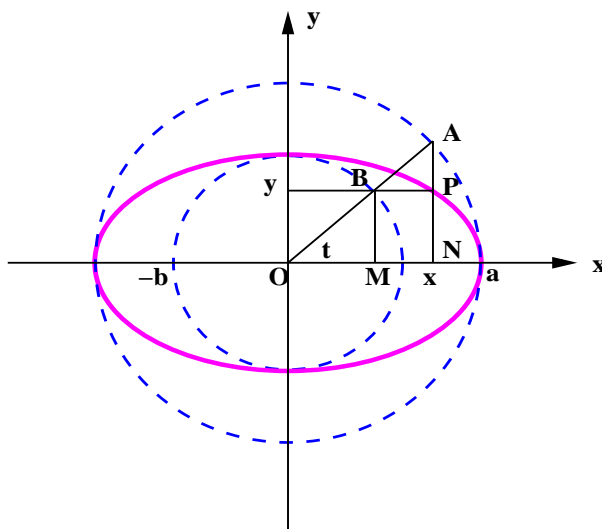



Figura 4.11: Construção da elipse.

Do triângulo ONA temos $x = a\,cos(t)$ e do triângulo OMB temos $y = b\,sen(t)$; logo:

$$\begin{cases} x(t) & = a\,cos(t) \\ y(t) & = b\,sen(t), \qquad 0 \leq t \leq 2\,\pi. \end{cases}$$

Por translação, as equações paramétricas da elipse centrada no ponto (h, k) são:

$$\begin{cases} x(t) & = a\,cos(t) + h \\ y(t) & = b\,sen(t) + k, \qquad 0 \leq t \leq 2\,\pi. \end{cases}$$

Em particular, se $a = b$, temos as equações paramétricas da circunferência de raio a centrada no ponto (h, k).

4.3.2 Parábola

A equação da parábola de vértice $(0,0)$, foco $(a,0)$ e diretriz paralela ao eixo dos y é:

$$y^2 = 4\,a\,x.$$

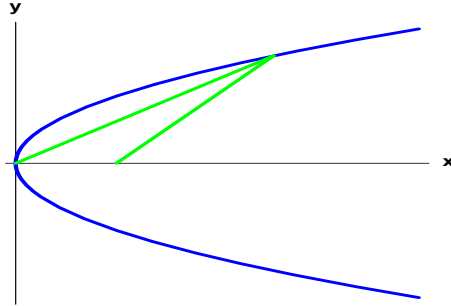



Figura 4.12: A parábola.

Por translação, a parábola com vértice $(-a,0)$, foco $(0,0)$ e diretriz paralela ao eixo dos y tem como equação $y^2 = 4\,a\,(x+a)$.

Fazendo $y = 2\,a\,t$, temos, $x = a\,t^2$ e as equações paramétricas da parábola $y^2 = 4\,a\,x$ são:

$$\begin{cases} x(t) & = a\,t^2 \\ y(t) & = 2\,a\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Por translação, as equações paramétricas da parábola $y^2 = 4\,a\,(x+a)$ são:

$$\begin{cases} x(t) & = a\,(t^2-1) \\ y(t) & = 2\,a\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De forma análoga, a parábola $x^2 = 4\,a\,y$ e a transladada $x^2 = 4\,a\,(y+a)$, tem equações paramétricas, respectivas:

$$\begin{cases} x(t) = 2\,a\,t \\ y(t) = a\,t^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x(t) = 2\,a\,t \\ y(t) = a\,(t^2-1), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

4.3.3 Hipérbole

A equação da hipérbole centrada em $(0,0)$ e assíntotas $x = \pm y$ é:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

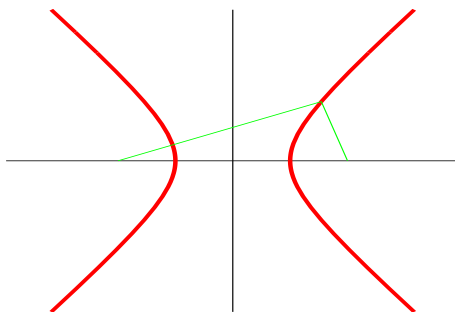



Figura 4.13: A hipérbole.

Utilizaremos as funções hiperbólicas, estudadas em Cálculo I.

Fazendo $x = cosh(t)$ e $y = senh(t)$, temos que $x^2 - y^2 = 1$; como $cosh(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos as equações paramétricas do ramo da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ situado no semiplano $x > 0$:

$$\begin{cases} x(t) = cosh(t) \\ y(t) = senh(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

O ramo situado no semiplano $x < 0$ tem as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = -cosh(t) \\ y(t) = senh(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A hipérbole centrada em $(0, 0)$ e assíntotas $b\,x = \pm a\,y$ tem equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a,\, b \neq 0.$$

Fazendo $x = a\,u$ e $y = b\,v$ temos que $u^2 - v^2 = 1$; logo, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = \pm a\, cosh(t) \\ y(t) = b\, senh(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Por translação, as equações paramétricas da hipérbole centrada em (h, k) são:

$$\begin{cases} x(t) = \pm a\, cosh(t) + h \\ y(t) = b\, senh(t) + k, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemplo 4.3.

Determine as equações paramétricas de:

[1] $y - x^2 + 1 = 0$. A equação representa uma parábola; então, fazendo $x = t$, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= t^2 - 1, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

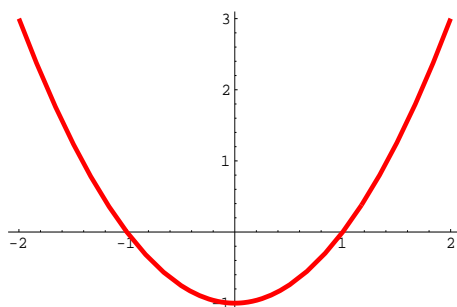



Figura 4.14: A parábola do exemplo [1].

[2] $x^2 + y^2 - 6\,x - 4\,y + 4 = 0$. Completando os quadrados, temos:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9,$$

que é um circunferência de raio 3 centrada no ponto $(3, 2)$. Logo as equações são:

$$\begin{cases} x(t) &= 3\,cos(t) + 3 \\ y(t) &= 3\,sen(t) + 2, \qquad 0 \leq t \leq 2\,\pi. \end{cases}$$

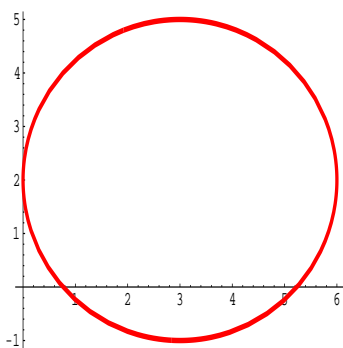



Figura 4.15: A circunferência do exemplo [2].

[3] $9\,x^2 + 18\,x + 4\,y^2 - 8\,y = 23$. Completando os quadrados, temos:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1,$$

que é uma elipse centrada em $(-1, 1)$, com $a = 2$ e $b = 3$:

$$\begin{cases} x(t) &= 2\,cos(t) - 1 \\ y(t) &= 3\,sen(t) + 1, \qquad 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

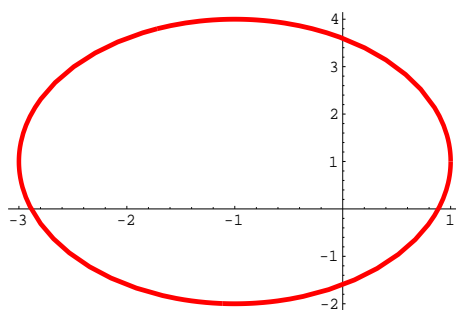



Figura 4.16: A elipse do exmplo [3].

[4] $x^2 - 2\,x - y^2 = 0$. Completando os quadrados, temos $(x-1)^2 - y^2 = 1$, que é uma hipérbole centrada em $(1, 0)$:

$$\begin{cases} x(t) &= \pm cosh(t) + 1 \\ y(t) &= senh(t), \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

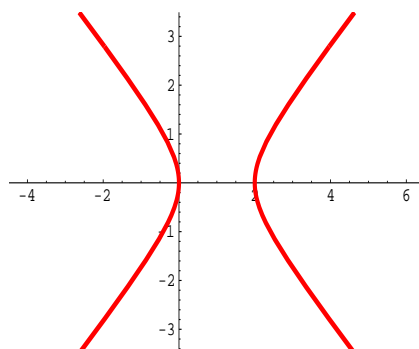



Figura 4.17: A hipérbole do exemplo [4].

4.4 Parametrização de Curvas Planas Clássicas

4.4.1 Parábola semi-cúbica

É o lugar geométrico determinado pela equação: $27\,a\,y^2 = 4\,x^3$, $a \neq 0$. Fazendo $y = \dfrac{2\,t\,x}{3}$, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) &= 3\,a\,t^2 \\ y(t) &= 2\,a\,t^3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

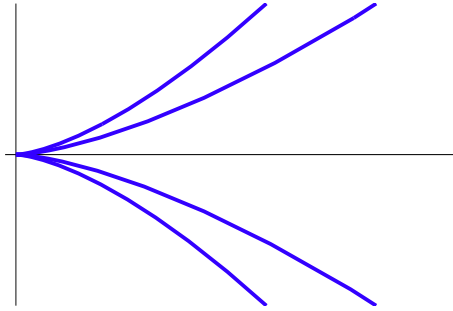



Figura 4.18: Desenhos são para $a = 0.5$ e $a = 3$.

4.4.2 Folium de Descartes

É o lugar geométrico determinado pela equação: $3\,y^2\,(a - x) = x^2\,(x + 3\,a)$, $a \neq 0$. Fazendo $y = t\,x$ obtemos:

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{3\,a\,(t^2 - 1)}{3\,t^2 + 1} \\ \\ y(t) &= \dfrac{3\,a\,t\,(t^2 - 1)}{3\,t^2 + 1}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A curva tem um laço.

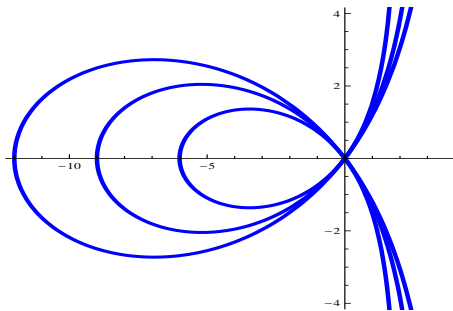



Figura 4.19: Desenhos são para $a = 2$, $a = 3$ e $a = 4$.

4.4.3 Lemmiscata de Bernoulli

É o lugar geométrico determinado pela equação: $(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2)$, $a \neq 0$. Fazendo $y = x\,sen(t)$, obtemos:

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{a\,cos(t)}{1+sen^2(t)} \\ \\ y(t) &= \dfrac{a\,cos(t)\,sen(t)}{1+sen^2(t)}, \quad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases}$$

A curva tem dois laços.

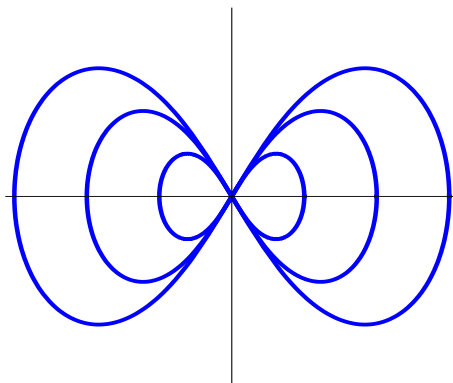



Figura 4.20: Desenhos para $a = 1$, $a = 2$ e $a = 3$.

4.5 Parametrização das Roletas

Uma roleta (roulette) é o lugar geométrico determinado por um ponto fixo P associado a uma curva C_1 que rola, sem deslizar, ao longo de outra curva fixa C_2. A seguir exemplos mais importantes de roletas.

4.5.1 Ciclóide

É a roleta onde C_2 é uma reta, C_1 é um círculo e P pertence à circunferência C_1. Considere a reta como o eixo coordenado OX, C_1 um círculo de raio a centrado no ponto A; C_1 começa a rolar a partir da origem e P é o ponto fixo em C_1. Sejam E e B os pés das perpendiculares passando por $P = (x(t), y(t))$ e A em relação a OX, respectivamente. Veja o desenho:

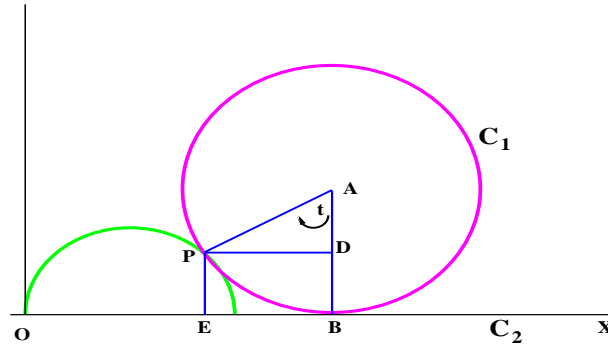



Figura 4.21: Contrução da ciclóide.

Seja $t = \angle DAP$, no sentido indicado; PD é perpendicular a BA; como C_1 rola sem deslizar de O a B, temos:

$$\overline{OB} = \text{arco}\, PB = a\,t,$$

$$x(t) = \overline{OE} = \overline{OB} - \overline{EB} = a\,t - \overline{PD}$$

e

$$y(t) = \overline{EP} = \overline{BD} = \; = \overline{BA} - \overline{DA}.$$

Então, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x(t) = & a\,t - a\,sen(t) \\ y(t) = & a - a\,cos(t) \qquad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases}$$

Figura 4.22: A ciclóide.

As seguintes curvas, além de sua beleza, são utilizadas em Engenharia, no desenho de engrenagens.

4.5.2 Epitrocóide

É a roleta descrita por um ponto P que fica a uma distância fixa do centro de um círculo C_1 de raio b, que rola sem deslizar, no exterior de outro círculo C_2, fixo.

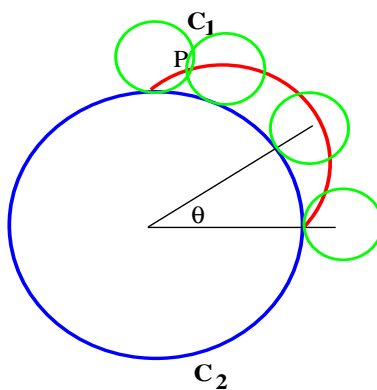



Figura 4.23: A epitrocóide.

A parametrização da epitrocóide é:

$$\begin{cases} x(t) & = m\,cos(t) - h\,cos(\frac{m\,t}{b}) \\ y(t) & = m\,sen(t) - h\,sen(\frac{m\,t}{b}), \qquad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases}$$

A curva possui $\frac{m}{b} - 1$ auto-interseções se $\frac{m}{b} \in \mathbb{Z}$.

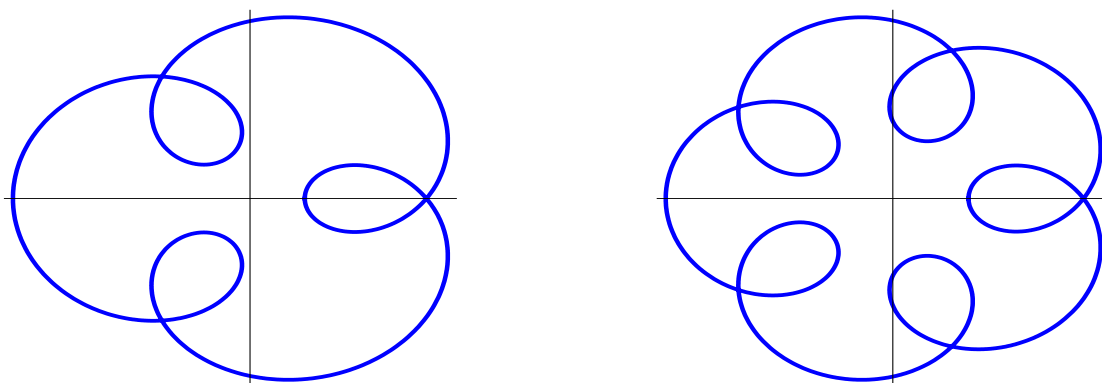



Figura 4.24: Desenho para $b = 2$, $h = 5$ e $m = 8$; $b = 2$, $h = 6$ e $m = 12$, respectivamente.

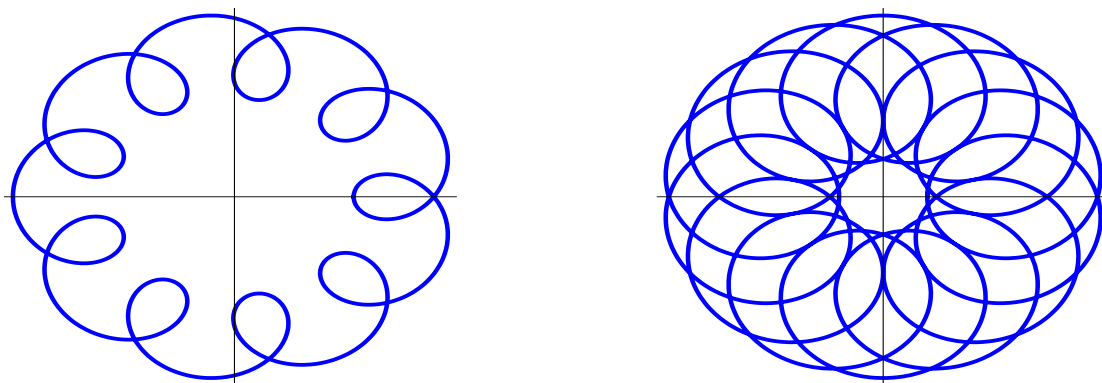



Figura 4.25: Desenho para $b = 2$, $h = 6$ e $m = 20$; $b = 2$, $h = 20$ e $m = 30$, respectivamente.

4.5.3 Hipotrocóide

É a roleta descrita por um ponto P que fica a uma distância fixa do centro de um círculo C_1 de raio b, que rola sem deslizar, no interior de outro círculo C_2, fixo.

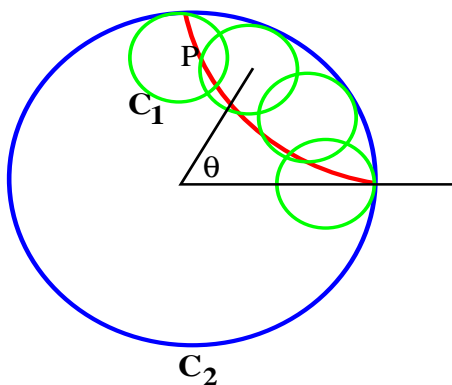



Figura 4.26: Construção da hipotrocóide.

As equações paramétricas da hipotrocóide são:

$$\begin{cases} x(t) & = n\,cos(t) + h\,cos(\dfrac{n\,t}{b}) \\ y(t) & = n\,sen(t) - h\,sen(\dfrac{n\,t}{b}), \qquad t \in [0, 2\,\pi]. \end{cases}$$

Se $h = b$, a curva é chamada hipociclóide. Se $h = 2\,b$ é uma elipse.

Existem $\dfrac{n}{b} + 1$ auto-interseções se $\dfrac{n}{b} \in \mathbb{Z}$. A curva tem simetria em relação ao eixo dos y se o inteiro $\dfrac{n}{b}$ é ímpar.

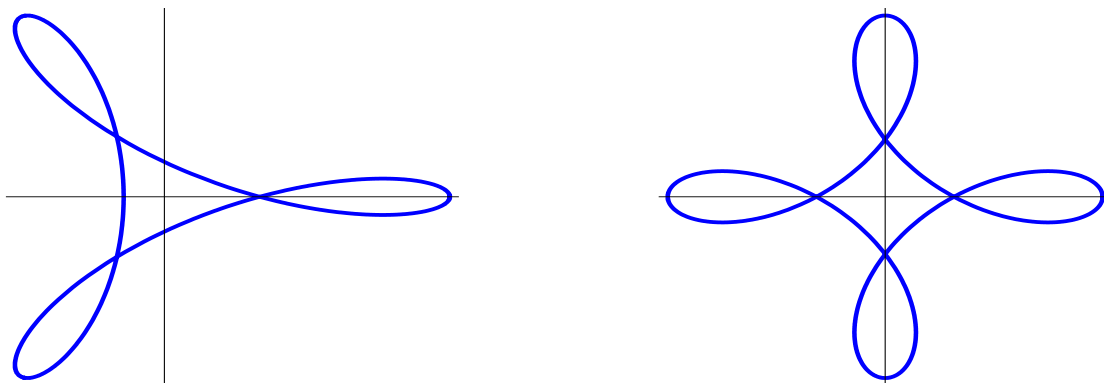



Figura 4.27: Desenhos para $b = 2$, $n = 4,\ 6$ e $h = 3,\ 4$, respectivamente.

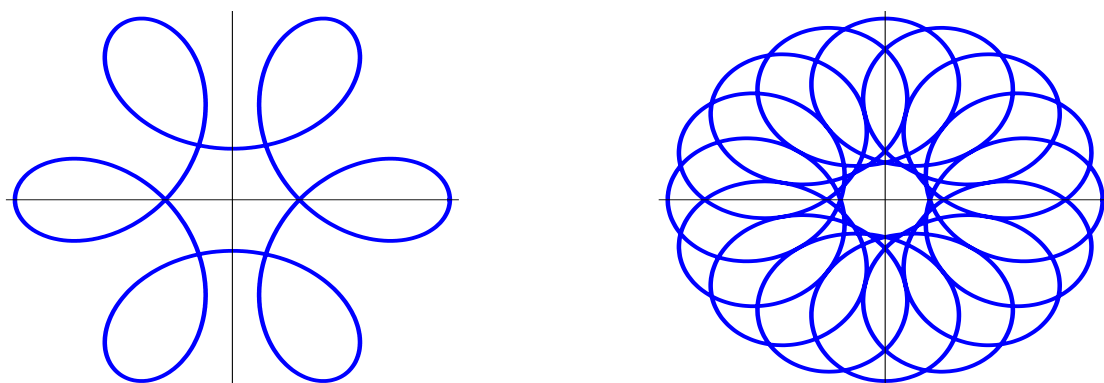



Figura 4.28: Desenhos para $b = 2$, $n = 10,\ 30$ e $h = 6,\ 20$, respectivamente.

4.6 Curvas no Espaço

O esboço de curvas no $\mathbb{R}^3$ é bastante mais complicado que no caso do plano. Na verdade duas quantidades importantes, a torção e a curvatura, que determinam completamente a curva, a menos de movimentos rígidos, somente serão estudadas em Geometria Diferencial.

Notamos que, muitas vezes nem as projeções da curva nos planos coordenados ajuda no esboço. Devido a isto, nesta notas, não insistiremos no desenho das curvas e sim nas parametrizações.

Exemplo 4.4.

[1] Considere a curva $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

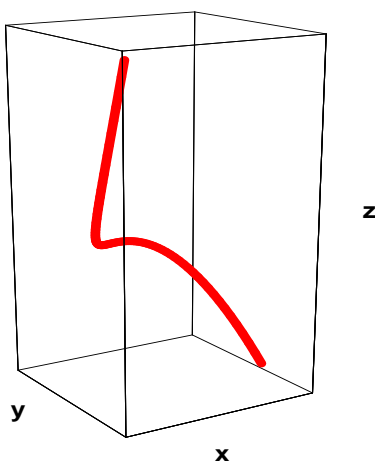



Figura 4.29: A curva do exemplo [1].

Note que a curva não possui nehum tipo de simetria.

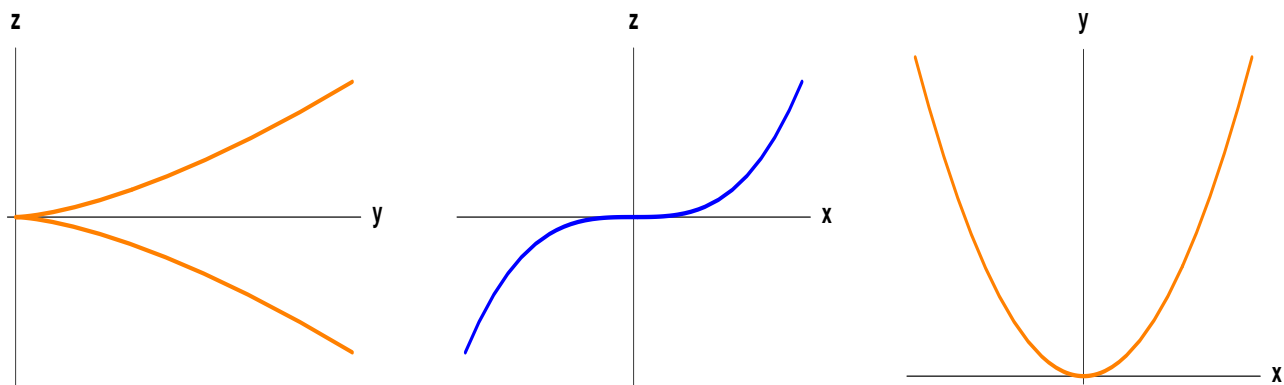



Figura 4.30: As projeções da curva nos planos coordenados.

[2] Considere a curva:

$$\gamma(t) = (cos(t)\,(2 + sen(2\,t)), sen(t)\,(2 + sen(2\,t)), t + cos(2\,t)),$$

$t \in [0, 6\,\pi]$.

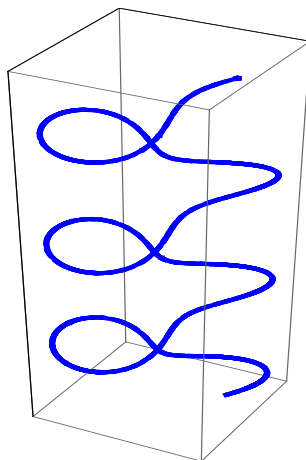



Figura 4.31: A curva do exemplo [2].

Esta curva também não possui nehum tipo de simetria.

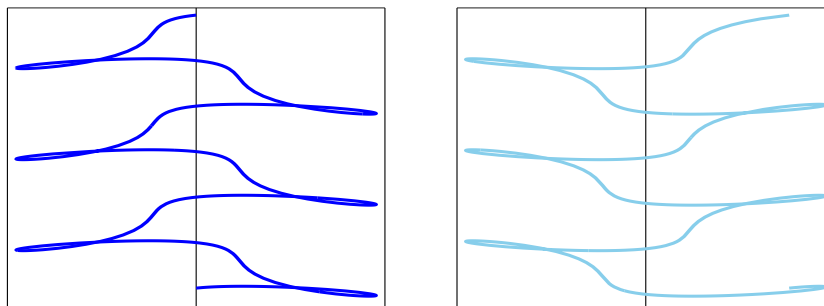



Figura 4.32: As projeções da curva nos planos coordenados.

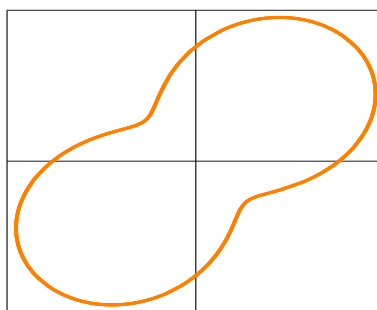



Figura 4.33: As projeções da curva nos planos coordenados.

4.6.1 Hélice Circular Reta

A hélice circular reta é o lugar geométrico descrito por um ponto que se move sobre um cilindro circular reto de raio a, de modo que a distância por ele percorrida, parale-

lamente ao eixo do cilindro, é diretamente proporcional ao ângulo segundo o qual gira em torno do referido eixo.

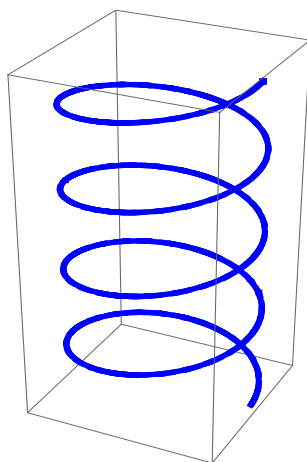



Figura 4.34: A hélice circular reta.

As equações paramétricas da hélice circular reta são:

$$\begin{cases} x(t) = & a\,cos(t) \\ y(t) = & a\,sen(t) \\ z(t) = & a\,m\,t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Se $m > 0$ a forma da hélice lembra um parafuso de rosca à direita; analogamente, se $m < 0$ a forma da hélice lembra um parafuso à esquerda.

No ano de 1953 os cientistas J. Watson e F. Crick descobriram que a estrutura da molécula de DNA (ácido desoxirribonucléico) é de duas hélices circulares paralelas interligadas:

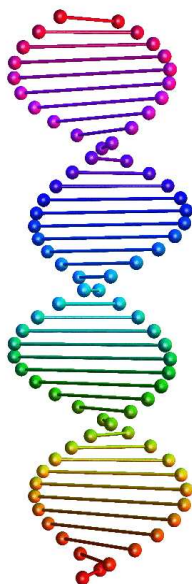



Figura 4.35: A hélice dupla do DNA.

A polarização de uma onda de luz é determinada pela curva descrita pelo movimento da extremidade do vetor "elétrico"; se o movimento é ao longo de uma hélice circular reta a luz é dita circularmente polarizada.

Uma curva C pode ter várias representações paramétricas. De fato, consideremos a circunferência centrada na origem de raio 1 e as seguintes representações:

$$\begin{cases} x_1(t) = cos(t) \\ y_1(t) = sen(t), \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_2(t) = cos(2\,t) \\ y_2(t) = sen(2\,t), \qquad t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Em ambos os casos temos $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$. Como funções, são diferentes, pois têm domínios diferentes, mas tem a mesma imagem ou traço C em $\mathbb{R}^2$. Mais adiante veremos a relação entre as parametrizações.

Se C está contida num plano é chamada **curva plana.**

4.7 Eliminação do Parâmetro

A equação cartesiana de uma curva que se apresenta na forma paramétrica é obtida pela eliminação do parâmetro t. Não existe um método geral para tal eliminação. O processo utilizado num problema depende, essencialmente, da forma das equações. A seguir, examinaremos alguns destes problemas.

Exemplo 4.5.

[1] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = \dfrac{t^2}{4} \\ \\ (2) \quad y = t + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De (2) temos $t = y - 1$. Substituindo em (1), obtemos:

$$(y - 1)^2 = 4x,$$

que é uma parábola, de vértice $(0, 1)$.

[2] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = sen(t) \\ (2) \quad y = 2\,cos(t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Multiplicando (1) por 2, temos $2x = 2\,sen(t)$; elevando ao quadrado esta última equação e somando ao quadrado de (2), temos:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,$$

que é uma elipse centrada na origem, cujo comprimento do semi-eixo maior é 2 e do semi-eixo menor é 1.

[3] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = \dfrac{1}{2 + t} \\ \\ (2) \quad y = \dfrac{t}{2 + t}, \quad t \neq -2. \end{cases}$$

Dividindo (2) por (1), temos: $y = t\,x$. Usando (1): $2\,x + y = 1$, que é uma reta.

[4] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = 2 + 3\,tg(t) \\ \\ (2) \quad y = 1 + 4\,sec(t), \quad t \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

De (1) e (2), temos: $tg(t) = \dfrac{x - 2}{3}$ e $sec(t) = \dfrac{y - 1}{4}$. Como $1 + tg^2(t) = sec^2(t)$:

$$\frac{(y - 1)^2}{16} - \frac{(x - 2)^2}{9} = 1,$$

que é uma hipérbole centrada em $(2,1)$.

[5] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = 2\,tg(t) \\ \\ (2) \quad y = 2\,cos^2(t), \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Como $x^2 = 4\,tg^2(t) = 4\,(sec^2(t) - 1)$ e de (2) $cos^2(t) = \frac{y}{2}$, temos:

$$y\,x^2 = 4\,(2 - y).$$

[6] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = sen^2(t) \\ \\ (2) \quad y = tg^2(t)\,sen^2(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Como $y^2 = sen^4(t)\,(sec^2(t) - 1)^2$ e de (1) $cos^2(t) = 1 - x$, temos:

$$y^2\,(x-1)^2 = x^4.$$

[7] Elimine o parâmetro de:

$$\begin{cases} (1) \quad x = \dfrac{cos(t)}{1 + sen^2(t)} \\ \\ (2) \quad y = \dfrac{cos(t)\,sen(t)}{1 + sen^2(t)}, \quad t \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Como $x^2 + y^2 = \dfrac{cos^2(t)}{1 + sen^2(t)}$ e $x^2 - y^2 = \dfrac{cos^4(t)}{(1 + sen^2(t))^2}$, temos:

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

4.8 Continuidade

Definição 4.3. *A curva $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua se suas funções coordenadas $x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ são contínuas.*

Exemplo 4.6.

[1] $\gamma(t) = (t, |t|)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva contínua.

[2] $\gamma(t) = (t, [[t]])$, $t \in \mathbb{R}$, onde $[[t]]$ indica o inteiro maior que t, não é uma curva contínua.

[3] $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, é uma curva contínua.

Definição 4.4. *Uma curva γ tem um ponto múltiplo se γ não é injetiva em I, ou equivalentemente, se existem $t_1,\ t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ tais que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$*

O ponto múltiplo de uma curva também é dito de autointerseção.

Exemplo 4.7.

[1] A curva C parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = & t^2 \\ y(t) = & t^3 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

possui um ponto múltiplo para $t_1 = 1$ e $t_2 = -1$, $\gamma(1) = \gamma(-1) = (1, 0)$.

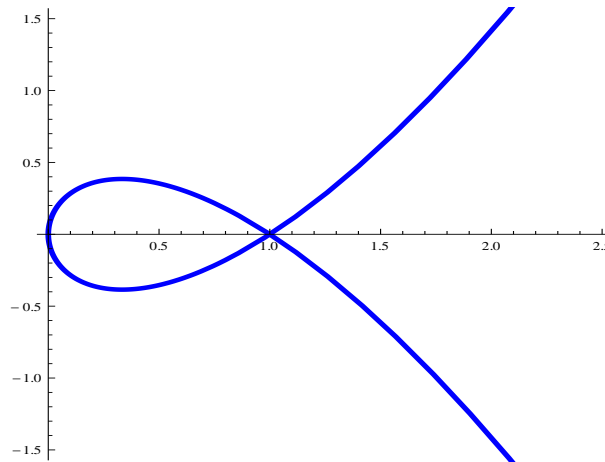



Figura 4.36: Curva do exemplo [1].

[2] A curva C parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = cos(t) - \dfrac{cos(3\,t)}{2} \\ \\ y(t) = sen(t) - \dfrac{sen(3\,t)}{2}, \ t \in [-\pi, \pi], \end{cases}$$

possui 2 pontos múltiplos, $\gamma(-\pi) = \gamma(\pi) = \big(-\dfrac{1}{2}, 0\big)$ e $\gamma\big(-\dfrac{\pi}{6}\big) = \gamma\big(\dfrac{\pi}{6}\big) = \dfrac{1}{2}\,\big(\sqrt{3}, 0\big)$.

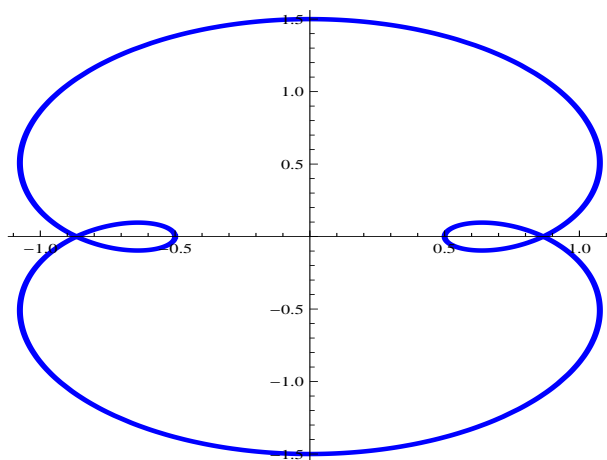



Figura 4.37: Curva do exemplo [2].

[3] Na curva $\gamma(t) = (cos(t), cos(t))$, $t \in \mathbb{R}$, todos os pontos são múltiplos.

De fato, $\gamma(t_0) = \gamma(t_0 + 2\,k\,\pi)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. O traço desta curva é o segmento de reta $y = x$ entre os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

[4] O folium de Descartes possui um ponto múltiplo na origem para $t = \pm 1$; a lemniscata de Bernoulli possui um ponto múltiplo na origem para $t = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Definição 4.5. *Seja* $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma curva parametrizada.*

1. $\gamma(a)$ *e* $\gamma(b)$ *são chamados ponto inicial e ponto final da curva, respectivamente.*

2. γ *é uma curva fechada se* $\gamma(a) = \gamma(b)$.

3. γ *é uma curva fechada simples se não possui pontos múltiplos em* $[a, b)$.

Exemplo 4.8.

[1] A curva C parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = cos(t)\,(2\,cos(t) - 1) \\ y(t) = sen(t)\,(2\,cos(t) - 1),\ t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

é uma curva fechada não simples, pois $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$.

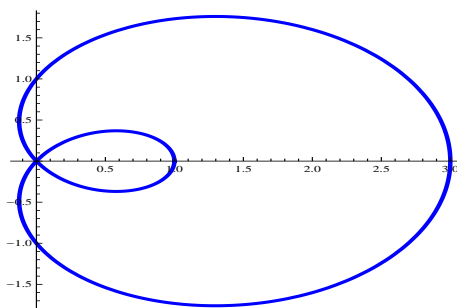



Figura 4.38: A curva do exemplo [1].

[2] A curva C parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = cos(t) \\ y(t) = sen(t) \\ z(t) = cos(2t), \ t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

é uma curva fechada simples:

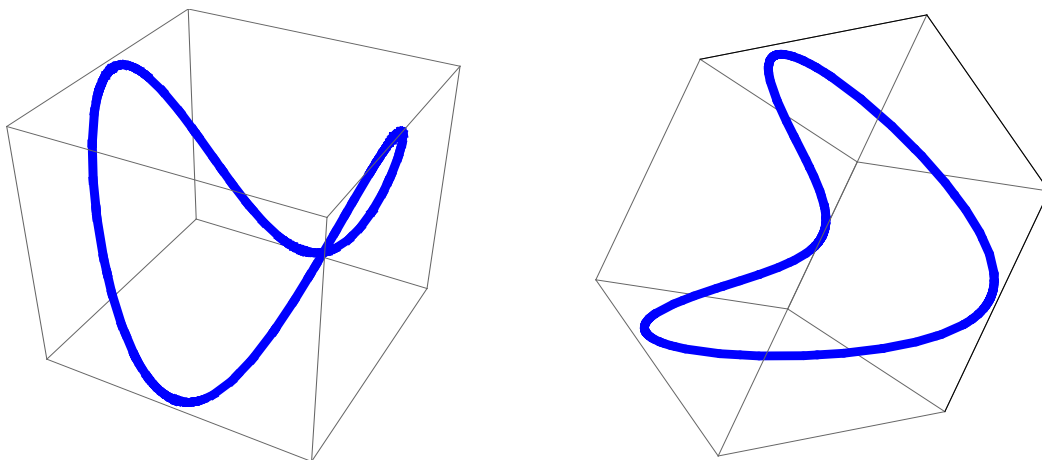



Figura 4.39: Vistas da curva do exemplo [2].

4.9 Diferenciabilidade

Definição 4.6. *Seja C uma curva parametrizada por $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, onde I é um intervalo aberto.*

1. *A curva γ é diferenciável no ponto $t_0 \in I$ se suas funções coordenadas $x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis em $t_0 \in I$.*

2. *A curva γ é diferenciável se é diferenciável em cada $t \in I$.*

3. *O vetor velocidade ou tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0)$ é :*

$$\gamma'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h},$$

   se o limite existe.

Para $n = 3$; $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e:

$$x'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

$$y'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}$$

$$z'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{z(t_0 + h) - z(t_0)}{h},$$

se os limites existem.

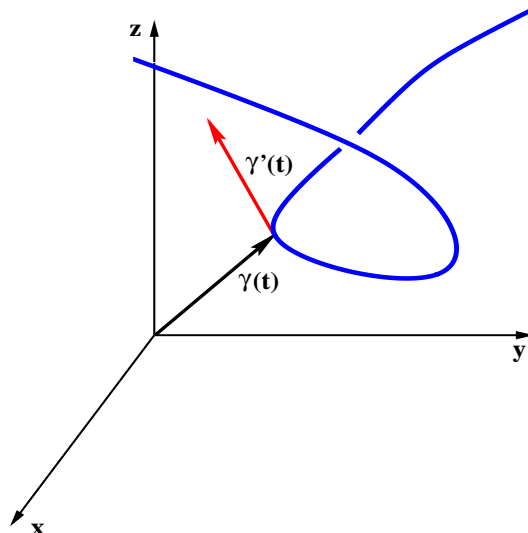



Figura 4.40:

Analogamente, para $n = 2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e:

$$x'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

$$y'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h},$$

se os limites existem.

Se $I = [a, b]$, é necessário que as derivadas laterais existam, isto é:

$$\gamma'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h} \quad \text{e} \quad \gamma'_{-}(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\gamma(b+h) - \gamma(b)}{h},$$

existam. Em particular, se é uma curva fechada $\gamma'_{+}(a)$ e $\gamma'_{-}(b)$ devem existir e:

$$\gamma'_{+}(a) = \gamma'_{-}(b).$$

$\|\gamma'(t_0)\|$ é chamada a velocidade escalar da curva no ponto $\gamma(t_0)$.

Por outro lado, temos que $\gamma'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), ..., x'_n(t))$, logo:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{[x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 + ... + [x'_n(t)]^2}.$$

Exemplo 4.9.

[1] Seja a curva parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2, \; t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Logo, $\gamma'(t) = (1, 2\,t)$ é o vetor velocidade de γ em cada ponto $\gamma(t)$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4\,t^2}$ é a velocidade em $\gamma(t)$.

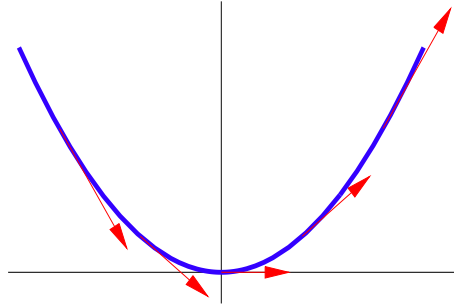



Figura 4.41: Exemplo [1].

[2] Seja a curva parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = |t|, \; t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se $t > 0$, $\gamma'(t) = (1, 1)$; se $t < 0$, $\gamma'(t) = (1, -1)$. As derivadas laterais no ponto 0 existem, mas são diferentes; logo a curva não é diferenciável no ponto 0.

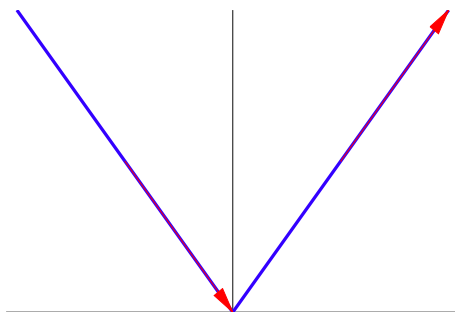



Figura 4.42: Exemplo [2].

[3] Sejam γ_1 e γ_2 parametrizações de C, definidas por:

$$\begin{cases} x_1(t) = cos(t) \\ y_1(t) = sen(t), \quad 0 \le t \le 2\,\pi, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_2(t) = cos(2\,t) \\ y_2(t) = sen(2\,t), \quad 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

Então $\|\gamma'_2(t)\| = 2\,\|\gamma'_1(t)\|$; logo, a velocidade de γ_2 é o dobro da de γ_1.

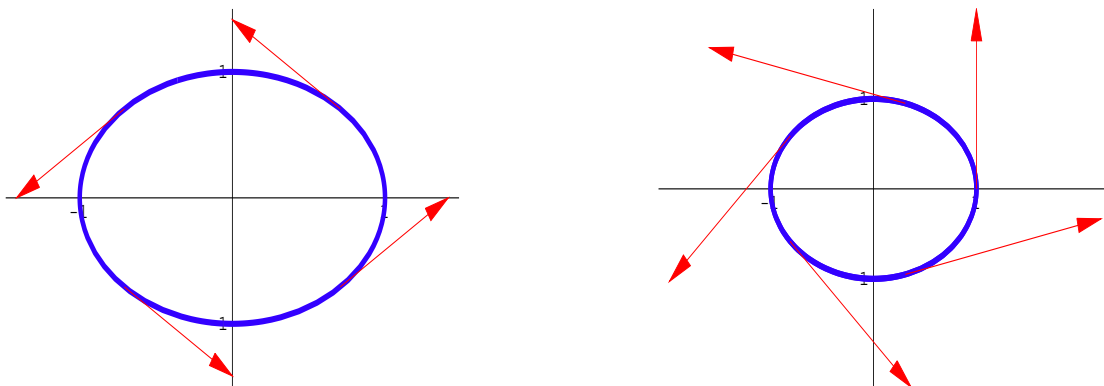



Figura 4.43: Exemplo [3].

Se aplicamos as diversas propriedades da derivada das funções de uma variável real às funções coordenadas de uma curva diferenciável, podemos obter as seguintes propriedades:

Proposição 4.1. *Sejam* $\gamma,\ \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *curvas diferenciáveis,* $r : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $h : I_1 \longrightarrow I$

funções reais diferenciáveis:

$$(1) \qquad (\gamma(t)+\beta(t))' = \gamma'(t)+\beta'(t)$$

$$(2) \qquad (r(t)\,\gamma(t))' = r'(t)\,\gamma(t)+r(t)\,\gamma'(t)$$

$$(3) \qquad (\gamma(t)\cdot\beta(t))' = \gamma'(t)\cdot\beta(t)+\gamma(t)\cdot\beta'(t)$$

$$(4) \qquad (\gamma(h(t))' = h'(t)\,\gamma'(h(t)),$$

onde $\cdot$ *é o produto escalar de vetores em* $\mathbb{R}^n$*. Em particular, se* $\gamma(t)\neq\overrightarrow{0}$*:*

$$(5) \qquad \|\gamma(t)\|' = \frac{\gamma(t)\cdot\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|}.$$

A prova segue diretamente das definições.

Da propriedade (5), $\gamma(t)$ tem comprimento constante se e somente se $\gamma'(t)$ é perpendicular ao vetor posição $\gamma(t)$, para todo $t\in I$.

Exemplo 4.10.

[1] Seja a curva C parametrizada por $\gamma(t) = (cos(t^3), sen(t^3))$, $\|\gamma(t)\| = 1$ e o vetor velocidade é:

$$\gamma'(t) = 3\,t^2(-sen(t^3), cos(t^3));$$

logo, $\|\gamma'(t)\| = 3\,t^2$ e o vetor velocidade tem comprimento variável mas, continua perpendicular a $\gamma(t)$.

[2] Seja a curva C parametrizada por $\gamma(t) = (cos(t)\,sen(2\,t), cos(2\,t), sen(t)\,sen(2\,t))$ tal que $t\in[0,2\,\pi]$; $\|\gamma(t)\| = 1$; o vetor tangente é:

$$\gamma'(t) = \big(2\,cos(t)\,cos(2\,t) - sen(t)\,sen(2\,t), -2\,sen(2\,t), 2\,cos(2\,t)\,sen(t) + cos(t)\,sen(2\,t)\big);$$

logo, $\|\gamma'(t)\|^2 = \dfrac{9-cos(4\,t)}{2} = 5 - cos^2(2\,t)$ e o vetor velocidade tem comprimento variável mas, continua perpendicular a $\gamma(t)$.

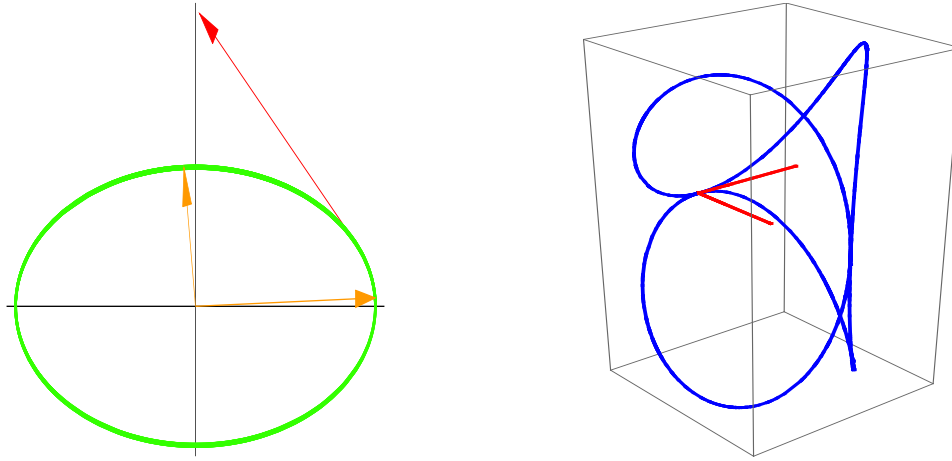



Figura 4.44: Curvas do exemplo [1] e [2], respectivamente.

Se $\|\gamma'(t)\| = 1$, da propriedade (5), temos: $\gamma'(t) \cdot \gamma''(t) = 0$; logo $\gamma''(t)$ é normal a $\gamma'(t)$.

De forma análoga ao que ocorre com as funções de uma variável real, tem sentido perguntar se a curva $\gamma' : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, diferenciável, etc.

Definição 4.7. *Seja* $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$*:*

1. *Se γ' é contínua para todo t, então γ é dita curva de classe C^1.*

2. *Se γ' é diferenciável, então $(\gamma')' = \gamma''$; $\gamma''(t)$ é chamado* **vetor aceleração** *da curva γ.*

3. *Uma curva C é de classe C^k, se possui uma parametrização γ tal que existem γ', γ'',......,$\gamma^{(k)}$, e a k-ésima derivada $\gamma^{(k)}$ é contínua.*

Definição 4.8. *Seja $h : I \longrightarrow I_1 \subset \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, bijetiva e $\gamma : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização da curva C de classe C^1. Então:*

$$\boxed{\beta = \gamma \circ h : I \longrightarrow \mathbb{R}^n}$$

é dita uma parametrização equivalente ou reparametrização de γ.

Se β é uma reparametrização de γ, por (4):

$$\beta'(t) = h'(t)\,\gamma'(h(t));$$

logo, a velocidade escalar da curva é multiplicada pelo fator $|h'(t)|$.

Seja $h : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ uma função bijetiva e diferenciável. Se h é crescente, $h(c) = a$, $h(d) = b$ e:

$$\|\beta'(t)\| = h'(t)\,\|\gamma'(h(t))\|;$$

analogamente, se h é decrescente, $h(c) = b$, $h(d) = a$ e $\|\beta'(t)\| = -h'(t)\,\|\gamma'(h(t))\|$

Toda curva C parametrizada por $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser reparametrizada com domínio no intervalo $[0,1]$.

De fato, considere $h : [0,1] \longrightarrow [a,b]$ definida por $h(t) = (b-a)\,t + a$; h satisfaz todas as propriedades da definição e $h'(t) = b - a$. Logo:

$$\boxed{\beta(t) = \gamma((b-a)t + a), \quad t \in [0,1]}.$$

Exemplo 4.11.

[1] A circunferência centrada na origem, de raio a, pode ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x_1(t) = a\,cos(t) \\ y_1(t) = a\,sen(t)), \quad 0 \le t \le 2\,\pi, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_2(t) = a\,cos(2\,t) \\ y_2(t) = a\,sen(2\,t)), \quad 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

$\gamma(t) = (a\,cos(t), a\,sen(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ pode ser reparametrizada considerando $h(t) = 2\,t$, de modo que $\beta(t) = (\gamma \circ h)(t) = \gamma(2\,t) = (a\,cos(2\,t), a\,sen(2\,t))$, $t \in [0,\pi]$; logo, α e β são parametrizações equivalentes.

[2] A circunferência centrada na origem, de raio a, também pode ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x_1(t) = a\,cos(t) \\ y_1(t) = a\,sen(t)), \quad 0 \le t \le 2\,\pi, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_2(t) = a\,cos(2\,t) \\ y_2(t) = a\,sen(2\,t)), \quad 0 \le t \le 2\,\pi. \end{cases}$$

As parametrizações não são equivalentes. O vetor de comprimento maior corresponde ao vetor velocidade de $(x_2(t), y_2(t))$ e o de menor comprimento corresponde ao vetor velocidade de $(x_1(t), y_1(t))$:

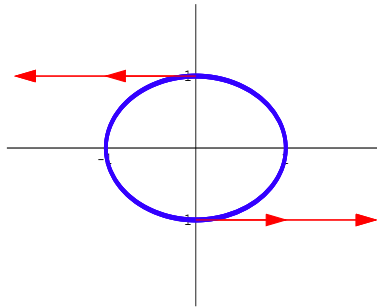



Figura 4.45: Exemplo [2].

[3] Seja a elipse parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = 2\,cos(2\,t) \\ y(t) = sen(2\,t)), \ t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Determine o sentido do vetor velocidade, a aceleração e as velocidades máxima e mínima.

O vetor velocidade é $\gamma'(t) = (-4\,sen(2\,t), 2\,cos(2\,t))$; logo tem sentido anti-horário.
Seja:

$$f(t) = \|\gamma'(t)\| = 2\,\sqrt{3\,sen^2(2\,t) + 1}.$$

Do Cálculo I sabemos que $f(t)$ atinge o máximo se $sen(2\,t) = 1$, isto é, se $t = \dfrac{\pi}{4}$ e atinge o mínimo se $sen(2\,t) = 0$, ou seja, $t = 0$ e $t = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} f(\frac{\pi}{4}) &= 4; & \gamma(\frac{\pi}{4}) &= (0, 1); & \gamma'(\frac{\pi}{4}) &= (-4, 0) \\ f(\frac{\pi}{2}) &= 2; & \gamma(\frac{\pi}{2}) &= (-2, 0); & \gamma'(\frac{\pi}{2}) &= (0, -2) \\ f(0) &= 2; & \gamma(0) &= (2, 0); & \gamma'(0) &= (0, 2); \end{aligned}$$

$\gamma''(t) = -4\,\gamma(t)$; logo $\gamma''(t)$ aponta para o centro da elipse.

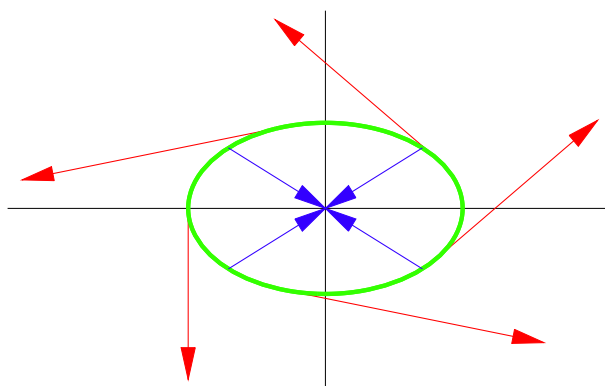



Figura 4.46: Exemplo [3].

Definição 4.9. *Uma curva C é regular se possui parametrização γ tal que $\gamma'(t) \neq \overrightarrow{0}$ para todo $t \in I$.*

Exemplo 4.12.

[1] Seja $\gamma : [0, 3\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\gamma(t) = (t - sen(t), 1 - cos(t));$$

γ não é regular. De fato, $\gamma'(t) = (1 - cos(t), sen(t))$ e $\gamma'(0) = \gamma'(2\,\pi) = \overrightarrow{0}$.

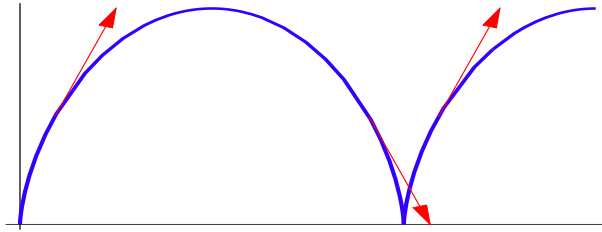



Figura 4.47: Exemplo [1].

[2] As cônicas são regulares.

[3] Se $y = f(x)$ é uma função diferenciável, as curvas parametrizadas por $\gamma(t) = (t, f(t))$ são regulares.

[4] Seja:

$$\gamma(t) = \big(1 - cos(t), sen(t), 2\,sen(\frac{t}{2})\big),$$

$t \in [-2\pi, 2\pi]$; γ é regular e de classe C^1.

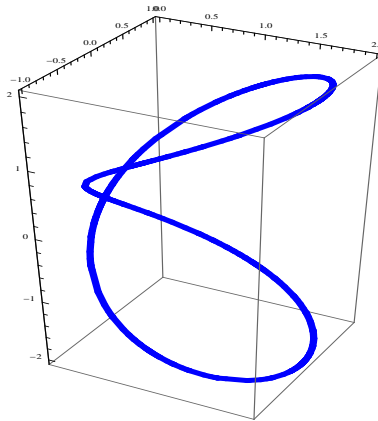



Figura 4.48: Exemplo [4].

$\gamma'(t) = (sen(t), cos(t), cos(\dfrac{t}{2}))$ é contínua e:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + cos^2(\frac{t}{2})} \neq 0$$

para todo $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

Definição 4.10. *Um arco da curva C parametrizada por $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a restrição da parametrização a um subconjunto próprio I_1 de I. É denotado e definido por:*

$$\gamma_{arc} : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

onde $\gamma_{arc}(t) = \gamma(t)$, $t \in I_1$.

Exemplo 4.13.

Um arco da curva:

$$\gamma(t) = (cos^3(t), sen^3(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\,\pi$$

é $\gamma_{arc}(t) = \gamma(t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

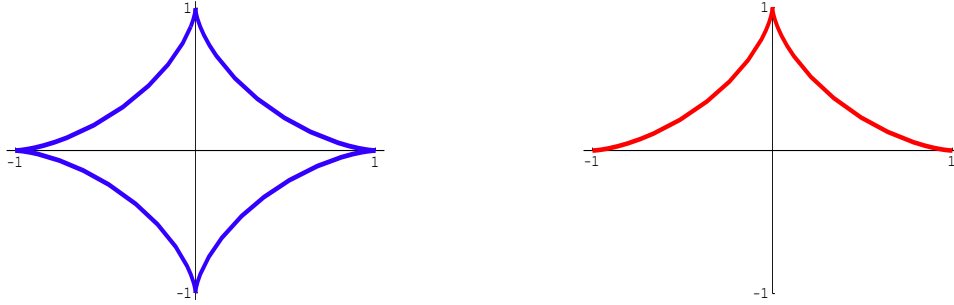



Figura 4.49: Curva e arco da curva, respectivamente.

Uma curva regular parametrizada por γ, de classe C^1 pode ter pontos múltiplos. Mas, para todo $t_0 \in I$ existem um intervalo aberto $I_0 \subset I$ tal que $t_0 \in I_0$ e um arco de γ em I_0 sem pontos múltiplos.

De fato, como γ é regular, pelo menos uma das derivadas das funções coordenadas de γ é não nula em t_0, por exemplo, $x_i^{'}(t_0) \neq 0$. A função real $x_i^{'}(t)$ é contínua em $t = t_0$, pois γ é de classe C^1; logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $x_i^{'}(t) \neq 0$ para todo $t \in I_0 = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e $\gamma_{arc} : I_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva. Caso contrário, existiriam $t_1,\ t_2 \in I_0$, $t_1 \neq t_2$ com $\gamma_{arc}(t_1) = \gamma_{arc}(t_2)$; então $x_i(t_1) = x_i(t_2)$; pelo teorema do valor médio em $\mathbb{R}$, existe $\overline{t}$, $t_1 < \overline{t} < t_2$, tal que:

$$x_i^{'}(\overline{t}) = \frac{x_i(t_1) - x_i(t_2)}{t_1 - t_2} = 0,$$

o que é uma contradição.

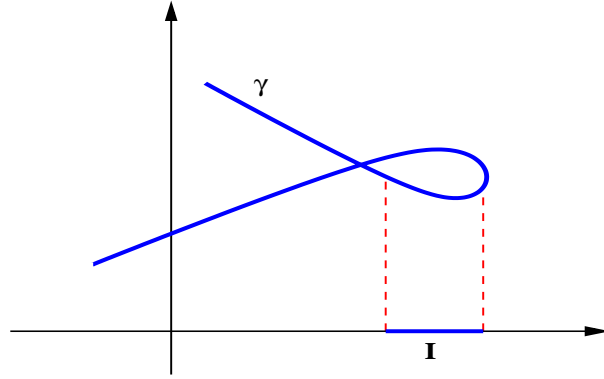



Figura 4.50:

Sejam $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $t \in I$, curva regular de classe C^1 e I_0 como antes. É possível provar que:

i) $x(I_0) = I_1 \subset I$ é um intervalo.

ii) $x : I_0 \longrightarrow I_1$ é de classe C^1 e admite inversa $x^{-1} : I_1 \longrightarrow I_0$ também de classe C^1.

Podemos reparametrizar o arco de γ em I_1 da seguinte forma:

$$\beta(t) = \gamma(x^{-1}(t)) = (x^{-1}(x(t)), x^{-1}(y(t))) = (t, f(t)),$$

onde $f(t) = x^{-1}(y(t))$; logo $\beta(t)$ é o gráfico de $f(t)$.

Exemplo 4.14.

Seja $\gamma(t) = (cos(t), sen(t))$, $t \in [-2\,\pi, 2\,\pi]$; se $I_0 = (0, \pi)$ e $t_0 = \varepsilon = \dfrac{\pi}{2}$; então, $I_1 = (-1, 1)$ e $x^{-1}(t) = arccos(t)$, logo :

$$\beta : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

é definida por $\beta(t) = (t, f(t))$, onde $f(t) = arccos(sen(t))$.

A observação é uma aplicação direta do teorema da função inversa. Para mais detalhes veja a bibliografia.

Definição 4.11. *Seja uma curva parametrizada γ, de classe C^3. $\gamma(t_0)$ é ponto de cúspide de γ se $\gamma'(t_0) = \overrightarrow{0}$ e os vetores $\gamma''(t_0)$ e $\gamma'''(t_0)$ são linearmente independentes.*

Exemplo 4.15.

[1] A curva parametrizada por $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ possui uma cúspide em $\gamma(0)$; de fato, $\gamma'(0) = \overrightarrow{0}$, $\gamma''(0) = (2, 0)$ e $\gamma'''(0) = (0, 6)$.

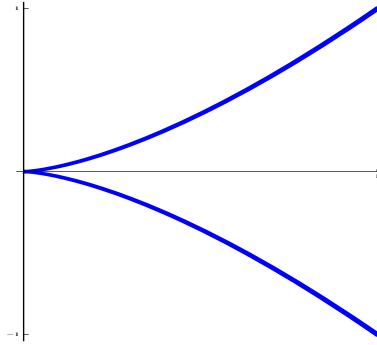



Figura 4.51: Exemplo [1].

[2] A curva parametrizada por $\gamma(t) = (cos^3(t), sen^3(t))$, $t \in [0, 2\,\pi]$, possui 4 cúspides; de fato, $cos^3(t) = \dfrac{1}{4}(cos(3t) + 3cos(t))$ e $sen^3(t) = -\dfrac{1}{4}(sen(3t) - 3sen(t))$, logo:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \frac{3}{4}\,(-sen(3t) - sen(t), cos(t) - cos(3t)) \\ \gamma''(t) &= \frac{3}{4}\,(-cos(t) - 3cos(3t), 3sen(3t) - sen(t)) \\ \gamma'''(t) &= \frac{3}{4}\,(9sen(3t) + sen(t), -cos(t) + 9cos(3t)). \end{aligned}$$

O sistema:

$$\gamma'(t) = \overrightarrow{0}$$

tem as seguintes soluções: $t = 0$, $t = \pi$ e $t = \pm\dfrac{\pi}{2}$; para $t = 0$, $\gamma''(0) = (-4, 0)$ e $\gamma'''(0) = (0, 8)$, ambos linearmente independentes. Analogamente os outros.

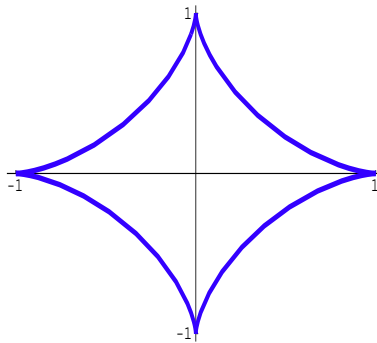



Figura 4.52: Exemplo [2].

[3] A parábola semi-cúbica possui uma cúspide na origem para $t=0$; a ciclóide possui infinitos pontos de cúspides ao longo do eixo dos x, ($t = 2\,k\,\pi$).

4.10 Reta Tangente

Seja γ uma parametrização regular de uma curva em $\mathbb{R}^n$. O vetor $\gamma'(t)$ determina a reta tangente em cada ponto de γ. Sejam $\gamma(t_0) = P$ e $\gamma'(t_0) = \vec{\mathbf{v}}$ o vetor tangente a γ em P. A reta que passa por P com direção $\vec{\mathbf{v}}$, tem como equação:

$$\boxed{r(t) = \gamma(t_0) + t\,\gamma'(t_0), \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

Se $n=3$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, $x_0^{'} = x'(t_0)$, $y_0^{'} = y'(t_0)$ e $z_0^{'} = z'(t_0)$, então, as equações paramétricas da reta tangente são:

$$\begin{cases} x = & x_0 + t\,x'_0 \\ y = & y_0 + t\,y'_0 \\ z = & z_0 + t\,z'_0, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

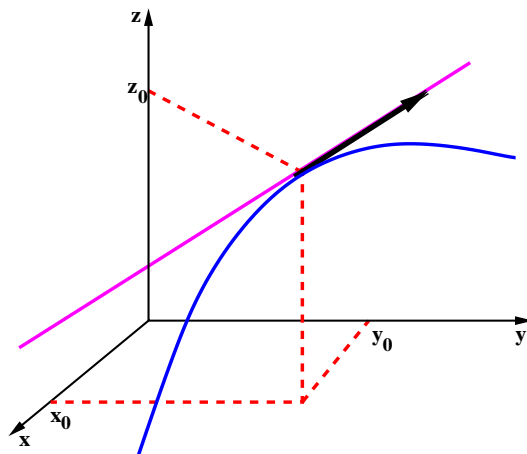



Figura 4.53: Reta tangente à curva.

Analogamente para $n=2$:

$$\begin{cases} x = & x_0 + t\,x'_0 \\ y = & y_0 + t\,y'_0, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exemplo 4.16.

[1] Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva $z = 4 - x^2$ e $y = 2$ no ponto $(1, 2, 3)$.
Fazendo $x = t$, obtemos uma parametrização da curva:

$$\begin{cases} x(t) = & t \\ y(t) = & 2 \\ z(t) = & 4 - t^2. \end{cases}$$

Como a curva passa pelo ponto $(1, 2, 3)$, temos $x(t_0) = t_0 = 1$, $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$ e $z'(t) = -2\,t$. As equações paramétricas da reta tangente são:

$$\begin{cases} x = & 1 + t \\ y = & 2 \\ z = & 3 - 2\,t. \end{cases}$$

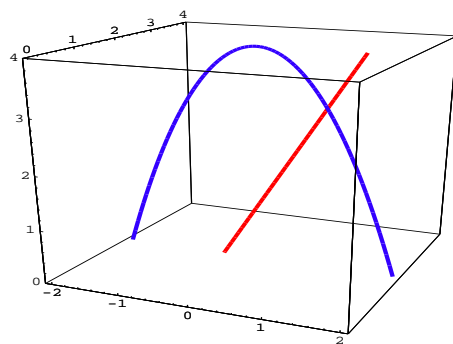



Figura 4.54: Exemplo [1].

[2] Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva C parametrizada por:

$$\gamma(t) = (2\,cos(t), 2\,sen(t), 4\,t)$$

no ponto $(1, -\sqrt{3}, -\dfrac{4\pi}{3})$.

Determinamos t_0 resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 1 & = x(t_0) = 2\,cos(t_0) \\ -\sqrt{3} & = y(t_0) = 2\,sen(t_0) \\ -\dfrac{4\pi}{3} & = z(t_0) = 4t_0 \end{cases}.$$

Logo $t_0 = -\dfrac{\pi}{3}$. Derivando no ponto t_0, obtemos: $x'(t_0) = \sqrt{3}$, $y'(t_0) = 1$ e $z'(t_0) = 4$. As

equações paramétricas da reta tangente são:

$$\begin{cases} x = & 1 + \sqrt{3}\,t \\ y = & -\sqrt{3} + t \\ z = & -\dfrac{4\pi}{3} + 4\,t. \end{cases}$$

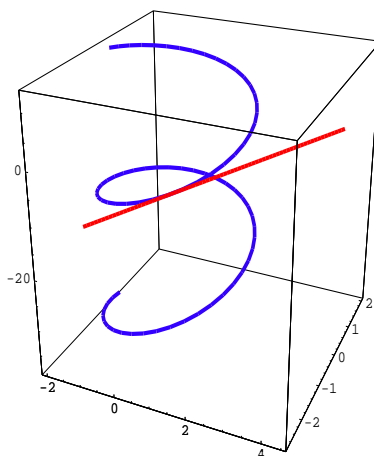



Figura 4.55: Exemplo [2].

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva plana. O vetor normal à curva γ é $\mathbf{n}(t) = (y'(t), -x'(t))$ ou $-\mathbf{n}(t)$; logo, a reta normal à curva $\gamma(t)$ no ponto $\gamma(t_0)$ é $\gamma(t_0) + t\,\mathbf{n}(t_0)$, ou equivalentemente:

$$\begin{cases} x = & x(t_0) + t\,y'(t_0) \\ y = & y(t_0) - t\,x'(t_0). \end{cases}$$

Exemplo 4.17.

[1] Determine as equações paramétricas da reta tangente e da reta normal a:

$$\begin{cases} x(t) = & 2\,cos(t) \\ y(t) = & 2\,sen(t), \end{cases}$$

no ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Primeiramente obtemos o valor de t_0 tal que $x(t_0) = \sqrt{2}$ e $y(t_0) = \sqrt{2}$, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{2} = x(t_0) = & 2\,cos(t_0) \\ \sqrt{2} = y(t_0) = & 2\,sen(t_0), \end{cases}$$

o qual tem como solução $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Calculando o vetor tangente no ponto t_0, temos $x'(t_0) = -\sqrt{2}$ e $y'(t_0) = \sqrt{2}$; logo as equações da reta tangente e da reta normal são:

$$\begin{cases} x_1(t) = \sqrt{2} - t\,\sqrt{2} \\ y_1(t) = \sqrt{2} + t\,\sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_2(t) = \sqrt{2} + t\,\sqrt{2} \\ y_2(t) = \sqrt{2} + t\,\sqrt{2} \qquad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

respectivamente.

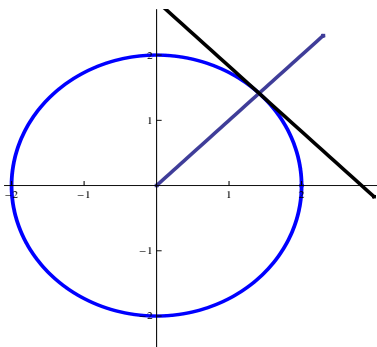



Figura 4.56: Exemplo [1].

[2] Determine as equações paramétricas da reta tangente e da reta normal a:

$$\begin{cases} x(t) = & 2 - t^{-1} \\ y(t) = & 2\,t + t^{-1}, \end{cases}$$

em $t_0 = 1$.
$x(1) = 1$ e $y(1) = 3$; o vetor tangente à curva é $(t^{-2}, 2 - t^{-2})$ e em $t_0 = 1$, $x'(1) = 1$ e $y'(1) = 1$. As equações da reta tangente e da reta normal são:

$$\begin{cases} x_1(t) = 1 + t \\ y_1(t) = 3 + t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_2(t) = 1 + t \\ y_2(t) = 3 - t \qquad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

respectivamente.

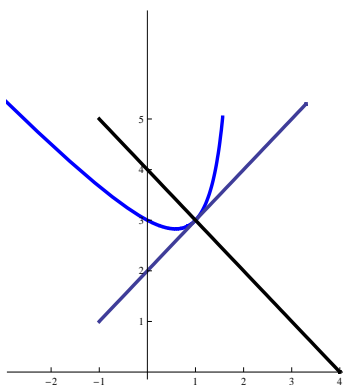



Figura 4.57: Exemplo [2].

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva em $\mathbb{R}^2$. Podemos calcular $\dfrac{dy}{dx}$ por eliminação do parâmetro. Mas é possível determiná-la, diretamante, pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt};$$

logo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

se as derivadas envolvidas existem. Analogamente, se fizermos $\overline{y} = \frac{dy}{dx}$, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d\overline{y}}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

se as derivadas envolvidas existem.

Exemplo 4.18.

Determine $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, se:

[1] $\begin{cases} x = & t^2 - 6 \\ y = & t^3 + 5, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Derivando: $x'(t) = 2t$ e $y'(t) = 3t^2$; logo: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2}{2t} = \dfrac{3}{2}t$, se $t \neq 0$; $\overline{y}(t) = \dfrac{3}{2}t$ e $\overline{y}'(t) = \dfrac{3}{2}$, lembrando que $(')$ é derivada em relação a t; e:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4\,t}, \quad \text{se} \quad t \neq 0.$$

[2] $\begin{cases} x = & 4\,cos^3(t) \\ y = & 4\,sen^3(t), \quad t \in (0, 2\,\pi). \end{cases}$

Derivando: $x'(t) = -12\,cos^2(t)\,sen(t)$ e $y'(t) = 12\,sen^2(t)\,cos(t)$, logo: $\dfrac{dy}{dx} = -tg(t)$, se $t \neq \dfrac{\pi}{2}$; $\overline{y}'(t) = -sec^2(t)$ e:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{12}\,sec^4(t)\,cosec(t), \quad \text{se} \quad t \neq \frac{\pi}{2}.$$

[3] $\begin{cases} x = & 2 - t^{-1} \\ y = & 2t + t^{-1}, \quad t \neq 0. \end{cases}$

Derivando: $x'(t) = t^{-2}$ e $y'(t) = 2 - t^{-2}$; logo: $\dfrac{dy}{dx} = 2t^2 - 1$, se $t \neq 0$; $\overline{y}'(t) = 4t$ e:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4t^3, \quad \text{se} \quad t \neq 0.$$

Sabemos do Cálculo em uma variável que $\dfrac{dy}{dx}(x_0) = m$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva passando por $P = (x_0, y_0)$. As equações cartesianas da reta tangente e da reta normal são:

$$\boxed{y - y_0 = m\,(x - x_0) \qquad \text{e} \qquad y - y_0 = -\frac{1}{m}\,(x - x_0)}$$

respectivamente, onde $x_0 = x(t_0)$ e $y_0 = y(t_0)$.

Exemplo 4.19.

[1] Determine as equações da reta tangente e da reta normal a:

$$\begin{cases} x(t) = & a\,cos(t) \\ y(t) = & b\,sen(t), \end{cases}$$

$t \in [0, 2\,\pi]$, se $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

$$x_0 = x(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a, \;\; y_0 = y(t_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,b \;\; \text{e} \;\; m = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = -\frac{b}{a}cotg(t).$$

As equações das retas tangente e normal no ponto (x_0, y_0) são:

$$b\,x + a\,y = \sqrt{2}\,a\,b \quad \text{e} \quad a\,x - b\,y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(a^2 - b^2),$$

respectivamente.

[2] Determine as equações da reta tangente e da reta normal a:

$$\begin{cases} x(t) = & 2 - t^{-1} \\ y(t) = & 2\,t + t^{-1}, \end{cases}$$

$t \neq 0$, se $t_0 = 1$. Do exemplo [3] da página anterior, $\dfrac{dy}{dx} = 2t^2 - 1$; $m = 1$, $x(1) = 1$ e $y(1) = 3$. Logo, as equações das retas tangente e normal no ponto (x_0, y_0) são:

$$y - x = 2 \quad \text{e} \quad y + x = 4,$$

respectivamente. Compare com o exemplo [3].

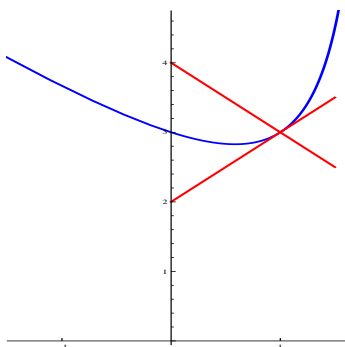



Figura 4.58: Exemplo [2].

Se C é uma curva plana parametrizada por γ que possui um ponto múltiplo para t_0 e t_1, isto não implica necessariamente que $\gamma'(t_0) = \gamma'(t_1)$ nem que estes vetores sejam paralelos. Vejamos o seguinte exemplo:

[3] Determine as equações da retas tangente à curva parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 - t, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

nos pontos $t = 1$ e $t = -1$.

Primeiramente observamos que $\gamma(1) = \gamma(-1) = (1, 0)$ e as equações das retas tangentes nos pontos $t = 1$ e $t = -1$ são:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 2\,t \\ y(t) = 2\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x(t) = 1 - 2\,t \\ y(t) = 2\,t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

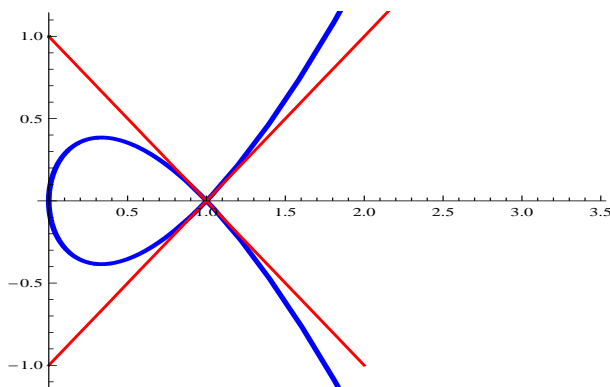



Figura 4.59: Exemplo [3].

4.11 Aplicação

Se uma partícula de massa m move-se ao longo de uma trajetória, a força total $\mathbf{F}$ que atua sobre a partícula em cada instante de tempo t é dada pela segunda lei de Newton:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\,\tilde{\mathbf{a}}},$$

onde $\tilde{\mathbf{a}}$ é o vetor aceleração da partícula. Em diversas situações, a força é dada pela posição da partícula ou, equivalentemente, pela trajetória $\gamma(t)$. Um problema interessante é determinar a trajetória que descreve o movimento da partícula, conhecendo sua posição inicial e sua velocidade.

A) Determinaremos a equação da trajetória de um míssil disparado com velocidade inicial $\vec{\mathbf{v}}_0$ e ângulo de inclinação α.
Fazemos as seguintes simplificações: não consideraremos a resistência do ar, o míssil é disparado na origem e a força $\mathbf{F}$ de gravidade g é constante.

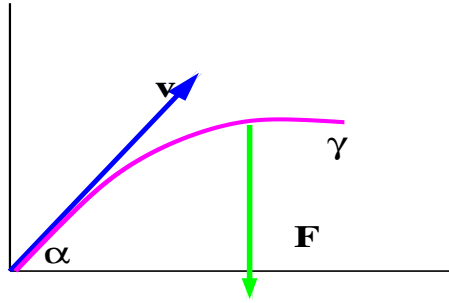



Figura 4.60: .

Denotemos por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a curva e por $\vec{\mathbf{v}}_0 = (v_0 cos(\alpha), v_0 sen(\alpha))$ o vetor velocidade. Se m é a massa do míssil, então $\mathbf{F}(x, y) = (0, -mg)$; pela Lei de Newton, $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$, onde $\mathbf{a}$ é o vetor aceleração, logo $\gamma''(t) = (0, -g)$ e:

$$\begin{cases} x''(t) = & 0 \\ y''(t) = & -g. \end{cases}$$

Integrando ambas em relação a t, obtemos $x'(t) = c_1$ e $y'(t) = -gt + c_2$; c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$; observemos que $\vec{\mathbf{v}}_0 = (x'(0), y'(0))$ então:

$$\begin{cases} x'(t) = & v_0\, cos(\alpha) \\ y'(t) = & -g\,t + v_0\, sen(\alpha). \end{cases}$$

Integrando novamente em relação a t e tendo em vista que $\gamma(0) = (0, 0)$:

$$\begin{cases} x(t) = & t\, v_0\, cos(\alpha) \\ y(t) = & t\, v_0\, sen(\alpha) - \dfrac{g\, t^2}{2}; \end{cases}$$

a trajetória é uma parábola.

B) Um planeta movendo-se ao redor do sol (considerado como a origem),

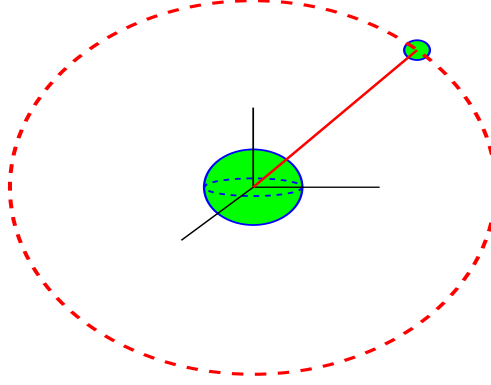



Figura 4.61: .

satisfaz à lei gravitacional de Newton:

$$\boxed{\mathbf{F}(\gamma(t)) = -\frac{m\,G\,M}{\|\gamma(t)\|^3}\,\gamma(t),}$$

onde γ é a curva que descreve o movimento do planeta em cada instante t, M é a massa do sol, m é a massa do planeta e $G = 6.67 \times 10^{-11}$ a constante gravitacional. Logo, temos que γ satisfaz à seguinte equação para todo t:

$$\boxed{\gamma''(t) = -\frac{G\,M}{\|\gamma(t)\|^3}\,\gamma(t).}$$

Nós não vamos resolver esta equação, mas tentaremos entendê-la no caso particular do movimento circular.

i) Suponhamos que γ descreve uma trajetória circular de raio r_0 e velocidade constante $v_0 = \|\gamma'(t)\|$. Escolhemos a seguinte parametrização da circunferência:

$$\begin{cases} x(t) = & v_0\,cos\left(\dfrac{v_0\,t}{r_0}\right) \\ y(t) = & v_0\,sen\left(\dfrac{v_0\,t}{r_0}\right), \end{cases}$$

pois γ é uma curva plana e podemos supor que está no plano xy:

$$\mathbf{a}(t) = \gamma''(t) = -\frac{v_0^2}{r_0^2}\,\gamma(t)$$

e a força $\mathbf{F}$ que atua é:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}(t) = -\frac{m\,v_0^2}{r_0^2}\,\gamma(t);$$

logo, $\mathbf{a}(t)$ tem sentido oposto ao vetor posição $\gamma(t)$.

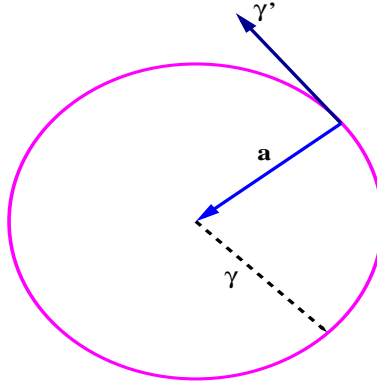



Figura 4.62: .

$\mathbf{F}$ é chamada força centrípeta.

ii) Suponhamos que um satélite de massa m move-se com velocidade constante v_0 ao redor de um planeta de massa M em órbita circular γ de raio r_0. A força $\mathbf{F}$ é dada por:

$$\mathbf{F}(\gamma(t)) = -\frac{m\,G\,M}{\|\gamma(t)\|^3}\,\gamma(t),$$

como o movimento é circular:

$$\mathbf{F} = -\frac{m\,v_0^2}{r_0^2}\,\gamma(t),$$

$\|\gamma(t)\|^3 = r_0^3$; igualando as duas equações:

$$-\frac{m\,v_0^2}{r_0^2}\,\gamma(t) = -\frac{m\,G\,M}{r_0^3}\,\gamma(t);$$

fazendo o produto escalar por $\gamma(t)$ em ambos os lados, obtemos: $v_0^2 = \dfrac{G\,M}{r_0}$. Se T é o período de uma revolução na órbita, então $v_0 = \dfrac{2\,\pi\,r_0}{T}$; logo:

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2\,r_0^3}{G\,M},$$

ou seja, o quadrado do período é proporcional ao cubo do raio. Esta é a terceira lei de Kepler.

4.12 Comprimento de Arco

Seja C uma curva de classe C^1, parametrizada por γ. Consideremos C como a trajetória de uma partícula com velocidade $s(t) = \|\gamma'(t)\|$, ao longo de γ. Intuitivamente o comprimento de arco da curva quando $t \in [a, b]$ é a distância total percorrida pela partícula no intervalo de tempo $t \in [a, b]$, isto é:

$$\int_a^b s(t)\,dt.$$

A forma de justificar a definição de comprimento de arco de uma curva γ se baseia na aproximação por poligonais. De fato:

Sejam $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^1 e a seguinte partição de ordem n do intervalo $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 <$ .... $< t_{n-1} < t_n = b$. Denotemos por:

$$P_0 = \gamma(t_0),\ P_1 = \gamma(t_1), \ldots, P_n = \gamma(t_n).$$

$[t_{i-1}, t_i]$ os subintervalos de $[a, b]$ determinados pela partição, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ o comprimento do subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ e $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ o segmento de reta que liga P_{i-1} e P_i, para $i = 1, ..., n$:

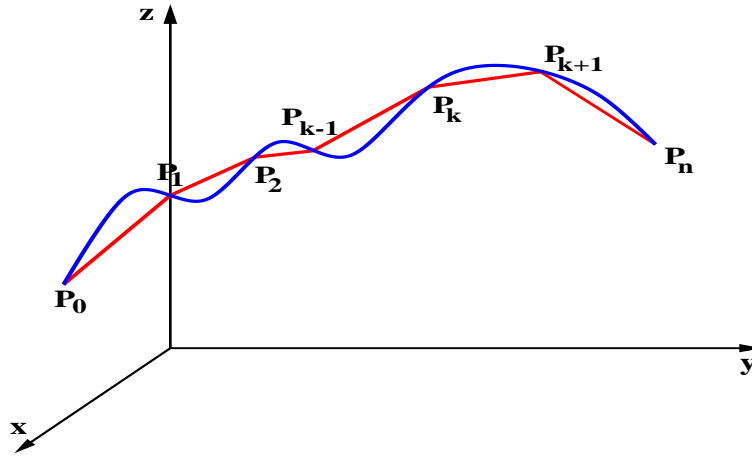



Figura 4.63: Partição da curva.

O comprimento do segmento $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ é:

$$\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}.$$

O comprimento total da poligonal é:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|.$$

Como $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ são funções reais de classe C^1, pelo teorema do valor médio aplicado às funções x, y e z em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, existem $\overline{t}_1$, $\overline{t}_2$ e $\overline{t}_3$ tais que:

$$\begin{cases} x(t_i) - x(t_{i-1}) & = x'(\overline{t}_1)\Delta t_i \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) & = y'(\overline{t}_2)\Delta t_i \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) & = z'(\overline{t}_3)\Delta t_i. \end{cases}$$

Logo:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(\overline{t}_1)]^2 + [y'(\overline{t}_2)]^2 + [z'(\overline{t}_3)]^2}\, \Delta t_i.$$

A rigor, a ultima expressão não é uma soma de Riemann, pois os $\overline{t}_1$, $\overline{t}_2$ e $\overline{t}_3$ não são necessariamente iguais. Utilizaremos agora o seguinte teorema sobre integração, que pode ser visto em [Lima, E.].

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $t_0 < \ldots\ldots < t_n$ uma partição de $[a, b]$ e $\overline{t} \in [t_{i-1}, t_i]$; então,

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{t})\, \Delta t_i,$$

onde existe a possibilidade de haver diferentes $\overline{t}$.

Aplicando o teorema a $f(t) = \sqrt{[x'(\overline{t}_1)]^2 + [y'(\overline{t}_2)]^2 + [z'(\overline{t}_3)]^2}$, obtemos:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \lim_{n \to +\infty} S_n,$$

isto para qualquer partição de $[a, b]$. Intuitivamente se $n \longrightarrow +\infty$ a poligonal aproxima-se da curva.

Definição 4.12. *Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva de classe C^1. O comprimento de arco de γ entre a e b é denotado por $L(\gamma)$ e definido por:*

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt.}$$

Exemplo 4.20.

[1] Seja $\gamma : [0, 2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\,cos(t), a\,sen(t))$; então:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} a\, dt = 2\,a\,\pi\; u.c.$$

[2] Seja $\gamma : [0, 4\,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a\,cos(t), a\,sen(t))$; então:

$$L(\gamma) = \int_0^{4\pi} a\,dt = 4\,a\,\pi\,u.c,$$

pois a trajetória de γ percorre duas vezes o mesma circunferência.

[3] Seja $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{3}\right)$; então, $\|\gamma'(t)\| = t\,\sqrt{t^2+1}$ e

$$L(\gamma) = \int_0^1 t\,\sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\,(2\,\sqrt{2} - 1)\,u.c.$$

[4] Seja $\gamma : [0, 2\,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (cos(t), sen(t), t)$, então, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$ e

$$L(\gamma) = \int_0^{2\,\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\,\sqrt{2}\,\pi\,u.c.$$

Se $\gamma(t) = (t, f(t))$ é de classe C^1, $a \le t \le b$, então:

$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt},$$

como sabemos do Cálculo em uma variável.

A definição de comprimento de arco é ainda válida se $\|\gamma'(t)\|$ tem um número finito de descontinuidades em $[a, b]$ ou, de forma mais geral, se $\|\gamma'(t)\|$ é integrável sobre $[a, b]$.

Proposição 4.2. *O comprimento de arco de uma curva é independente da parametrização.*

Prova: Sejam $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $h : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ de classe C^1, crescente, isto é, $h(c) = a$ e $h(d) = b$. Considere a parametrização equivalente $\beta : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\beta(t) = \gamma(h(t))$; logo, $\|\beta'(t)\| = |h'(t)|\,\|\gamma'(h(t))\| = h'(t)\,\|\gamma'(h(t))\|$, pois h é crescente, e:

$$L(\beta) = \int_c^d \|\beta'(t)\|\,dt = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} \|\gamma'(h(t))\|\,h'(t)\,dt = \int_a^b \|\gamma'(u)\|\,du = L(\gamma),$$

onde $u = h(t)$. O caso em que h é decrescente é análogo. O traço da curva não muda, o que muda é o tempo do percurso.

Exemplo 4.21.

[1] Seja $\beta : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (a\,cos(2\,t), a\,sen(2\,t))$ é uma parametrização equivalente a do exemplo [1] anterior, para $h(t) = 2\,t$; logo:

$$L(\beta) = \int_0^{\pi} 2\,a\,dt = 2\,a\,\pi\,u.c.$$

[2] $\beta : [0, 2\,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (a\,cos(2t), a\,sen(2t))$; logo:

$$L(\beta) = \int_0^{2\,\pi} 2\,a\,dt = 4\,a\,\pi\,u.c.$$

Então β não é uma parametrização equivalente a do exemplo [1].

4.13 Exercícios

1. Obtenha uma parametrização das seguintes curvas, determinando I:

   (a) $y = 2x + 7$

   (b) $y - x + 2 = 0$

   (c) $x^2 + y^2 = 16$

   (d) $y = tg^2(x)$

   (e) $y = ln(x)$

   (f) $9\,x^2 + 4\,y^2 = 36$

   (g) A reta ligando $(1, 1)$ e $(4, 3)$

   (h) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

   (i) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

   (j) $x^2 + y = 1$

   (k) $4\,x^2 - 9\,y^2 = 36$

   (l) $x^2 + y^2 - y = 0$

2. Verifique qua as hipérboles:

$$\begin{cases} x\,y = c^2, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

   podem ser parametrizadas por:

$$\begin{cases} x(t) = c\,t \\ y(t) = \dfrac{c}{t}, \;\; t \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = a\,sec(t) \\ y(t) = b\,tg(t), \;\; t \in (-\pi/2, \pi/2), \end{cases}$$

   respectivamente.

3. Elimine o parâmetro de:

   (a) $x(t) = a(1 - t),\; y(t) = b\,t$

   (b) $x(t) = a\,sec(t),\; y(t) = a\,tg(t)$

   (c) $x(t) = 2\,tg(t),\; y(t) = 3\,cotg(t)$

   (d) $x(t) = 2t + 2,\; y(t) = 2t^2 + 4t$

   (e) $x(t) = 2(1 + cos(t)),\; y(t) = 2\,sen(t)$

   (f) $x(t) = sen^4(t),\; y(t) = cos^4(t)$

   (g) $x(t) = \frac{2at}{1+t^2},\; y(t) = a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}$

   (h) $x(t) = 2\,sen(t) - 3\,cos(t),$
   $y(t) = 4\,sen(t) + 2\,cos(t)$

   (i) $x(t) = a\,sen(t),\; y(t) = b\,tg(t)$

   (j) $x(t) = sen(\frac{t}{2}),\; y(t) = cos(t)$

4. Esboçe o traço das seguintes curvas, fazendo uma tabela com uma quantidade razoável de entradas:

(a) $x(t)=t^2,\ y(t)=t$

(b) $x=3\,cos(t),\ y=sen(t)$

(c) $x(t)=sec(t),\ y(t)=tg(t)$

(d) $x(t)=sen(t),\ y(t)=cos(2t)$

(e) $x(t)=sen(3t),\ y(t)=cos(3t)$

(f) $x(t)=t+\dfrac{1}{t},\ y(t)=t-\dfrac{1}{t}$

(g) $x(t)=e^t+e^{-t},\ y(t)=2senh(t)$

(h) $x(t)=sen(t),\ y(t)=cos(2t),\ z(t)=t^2$

(i) $x(t)=t^2,\ y(t)=t^3,\ z(t)=t$

(j) $x(t)=t,\ y(t)=cos(t),\ z(t)=sen(t)$

5. Determine o vetor tangente às seguinte curvas:

(a) $x(t)=a(1-t),\ y(t)=b\,t$

(b) $x(t)=a\,sec(t),\ y(t)=a\,tg(t)$

(c) $x(t)=2\,tg(t),\ y(t)=3\,cotg(t)$

(d) $x(t)=2t+2,\ y(t)=2t^2+4t$

(e) $x(t)=2(1+cos(t)),\ y(t)=2\,sen(t)$

(f) $x(t)=sen^4(t),\ y(t)=cos^4(t)$

(g) $x(t)=\frac{2at}{1+t^2},\ y(t)=a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}$

(h) $x(t)=a\,sen(t),\ y(t)=b\,tg(t)$

(i) $x(t)=2\,sen(t)-3\,cos(t),$
$y(t)=4\,sen(t)+2\,cos(t)$

(j) $x(t)=2\,senh(t)-3\,cosh(t),$
$y(t)=4\,senh(t)+2\,cosh(t)$

6. Determine as equações da reta tangente às seguintes curvas:

(a) $\gamma(t)=(t,1-t^2,2)$ no ponto $(0,1,2)$

(b) $\gamma(t)=(2\,t^3-1,3-5\,t^2,8\,t+2)$ no ponto $(1,-2,10)$

(c) $\beta(t)=(e^t,t\,e^t,t+4)$ no ponto $(1,0,4)$

(d) $\beta(t)=(cos(t),sen(t),1-2\,sen(t))$ no ponto $(-1,0,1)$

(e) $\beta(t)=(t,t^2,t^3)$ no ponto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$

7. Verifique que se γ é a parametrização de uma reta, então γ'' é paralelo a γ'. A recíproca é válida?

8. Determine o comprimento de arco das seguinte curvas:

(a) $x(t)=2\,(1-sen(t)), y(t)=2\,(1-cos(t)), 0\le t\le\pi.$

(b) $x(t)=t\,cos(t), y(t)=t\,sen(t), 0\le t\le\pi.$

(c) $x(t) = \dfrac{t^2}{2} + t$, $y(t) = \dfrac{t^2}{2} - t$, $0 \leq t \leq 1$.

(d) $x(t) = t$, $y(t) = ln(cos(t))$, $t \in [0, 1]$.

(e) $x(t) = e^{-t}\, cos(t)$, $y(t) = e^{-t}\, sen(t)$, do ponto $(1, 0)$ até o ponto limite, quando $t \to +\infty$.

(f) $x(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{cos(u)\, du}{u^2}$, $y(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{sen(u)\, du}{u^2}$, do ponto $(0, 0)$ até o ponto mais próximo que tenha tangente vertical.

9. A cúbica de **Tschirnhausen** é o lugar geométrico determinado pela equação:

$$27\, a\, y^2 = x^2(x + 9\, a);\; a \neq 0.$$

(a) Verifique que esta curva pode ser parametrizada por:

$$\begin{cases} x(t) & = 3\, a\, (t^2 - 3) \\ y(t) & = a\, t\, (t^2 - 3), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Esboce o traço desta curva para $a = 1.5$ e $a = 3$.

(c) Verifique que a curva possui um ponto múltiplo na origem para $t = \pm\sqrt{3}$.

(d) Determine o vetor tangente e o vetor aceleração desta curva, em qualquer ponto.

10. A **serpentina de Newton** é o lugar geométrico determinado pela equação:

$$x^2\, y + a^2\, y - b^2\, x = 0;\; a,\; b \neq 0.$$

(a) Obtenha uma parametrização para esta curva.

(b) Esboce o traço desta curva para $a = 2$, $a = 4$, $a = 6$ e $b = 6$.

(c) Verifique que a curva é regular.

11. A **trissectriz de Maclaurin** é o lugar geométrico determinado pela equação:

$$y^2\, (a - x) = x^2\, (x + 3\, a);\; a \neq 0.$$

(a) Obtenha uma parametrização para esta curva.

(b) Esboce o traço desta curva para $a = 0.5$, $a = 1.5$ e $a = 2$.

(c) Verifique se a curva é regular e se possui pontos múltiplos.

12. Nas equações da epitrocóide: Se $h = b$ a curva é chamada **epiciclóide**.

(a) Obtenha uma parametrização para esta curva.

(b) Esboce o traço desta curva para $m = 16$ e $b = 2$.

(c) Verifique que os laços degeneram a $\dfrac{m}{b} - 1$ cúspides se $\dfrac{m}{b} \in \mathbb{Z}$.

Se $a = 2\,b$, a epitrocóide é chamada **nefróide**.

(d) Obtenha uma parametrização para esta curva.

(e) Esboce o traço desta curva para $a = 2$.

(f) Determine o vetor tangente a esta curva e verifique se é regular.

Se $a = b$ a epitrocóide é chamada de **limaçon**.

(g) Obtenha uma parametrização para esta curva.

(h) Esboce o traço desta curva para $a = 3$, $h = 8$ e $m = 6$.

(i) Determine os pontos múltiplos desta curva.

13. Verifique que a curva parametrizada por $\gamma(t) = (sen(2\,t), 2\,sen^2(t), 2\,cos(t))$ está situada sobre uma esfera centrada na origem. Ache o comprimento do vetor velocidade e verifique que a projeção deste vetor no plano xy tem comprimento constante.

14. Seja γ uma curva de classe C^1 com ponto inicial $A = \gamma(a)$ e final $B = \gamma(b)$. Seja o segmento de reta $r(t) = A + t(B - A)$; $t \in [0, 1]$. Verifique que $L(r) \leq L(\gamma)$.

15. Verifique que se $\gamma : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $\gamma'(t) = 0$, para todo $t \in (a, b)$, então $\gamma(t)$ é um vetor constante no intervalo (a, b).

16. Seja C a curva definida pela equações $x = t^3$ e $y = t^6$, $t \in [-1, 1]$:

(a) A curva é de classe C^1?

(b) C é regular?

(c) Elimine o parâmetro e esboce o traço da curva.

17. Seja:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \\ -t^2 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

e considere a curva definida por:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = t^2, \ t \in [-1, 1] \end{cases}$$

(a) A curva é de classe C^1?

(b) C é regular?

(c)) Elimine o parâmetro e esboce o traço da curva.

18. As equações paramétricas da trajetória de um cometa são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = 200\, cos(t) \\ y(t) = 10\, sen(t), \quad t \in [0, 2\pi], \end{cases}$$

onde 200 e 10 são medidas em unidades astronômicas.

(a) Determine as equações paramétricas das retas tangente e normal no ponto $t = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) Determine a equação cartesiana da trajetória, identificando a mesma.

(c) Determine o comprimento da trajetória.

19. Seja $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada definida por:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3. \end{cases}$$

Determine os pontos da curvas nos quais o vetor tangente é paralelo ao vetor $(4, 4, 3)$.

20. Uma partícula se move ao longo de uma curva parametrizada por:

$$\gamma(t) = (t - sen(t), 1 - cos(t)),$$

$t \in [0, 2\pi]$. Determine os instantes t_1 e $t_2 \in [0, 2\pi]$, onde a velocidade escalar seja unitária.

Capítulo 5

CAMPOS DE VETORES

5.1 Introdução

Definição 5.1. Um campo de vetores em $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma função

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Em geral, se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto. O campo de vetores $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dito **contínuo, diferenciável ou de classe C^k em $\mathbf{u} \in A$** se todas as suas funções coordenadas:

$$F_i : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

são contínuas, diferenciáveis ou de classe C^k em $\mathbf{u} \in A$, respectivamente.

O nome se justifica se expressarmos graficamente F do seguinte modo: em cada ponto $\mathbf{x} \in A$ desenhamos um vetor de magnitude e direção de $F(\mathbf{x})$ com a origem em $\mathbf{x}$.

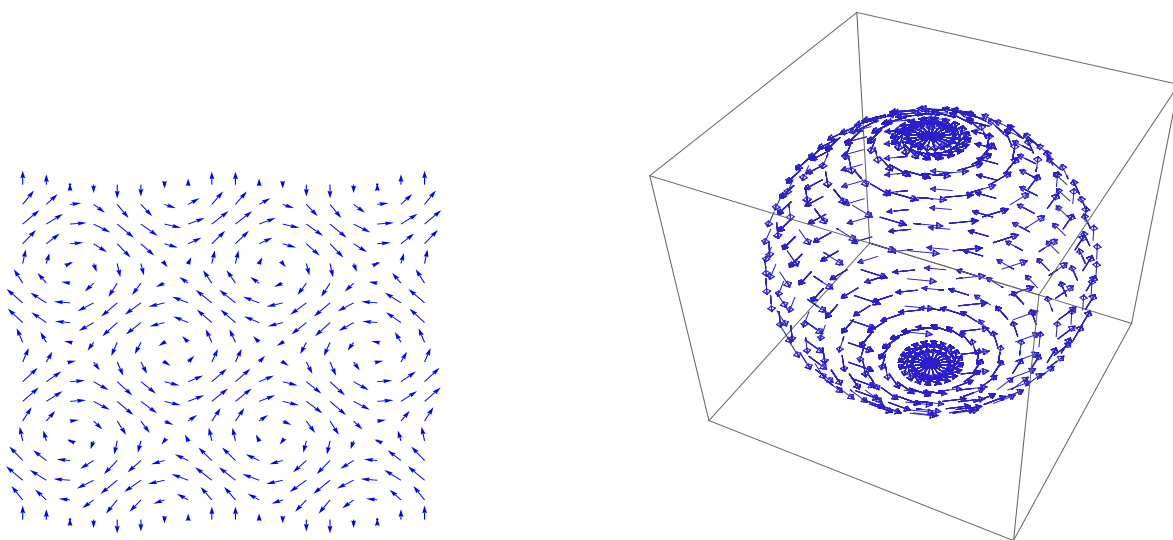



Figura 5.1: Campos de vetores no plano e no espaço, respectivamente.

Exemplo 5.1.

[1] Seja um fluido percorrendo um encanamento com fluxo constante. Se associamos a cada ponto a velocidade do fluido nesse ponto, obtemos um campo de vetores F de velocidades do fluido.

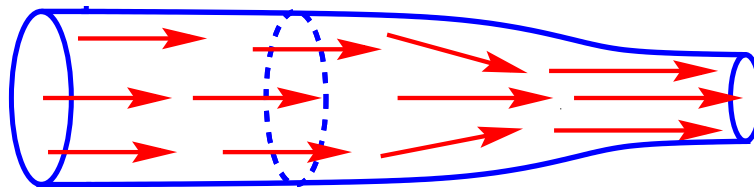



Figura 5.2: Campo de velocidade.

[2] Uma superfície metálica é aquecida por um lado de tal modo que perde calor pelo outro; a forma que flui o calor na placa define um campo de vetores. Como é de esperar, vai das regiões mais quentes para as mais frias.

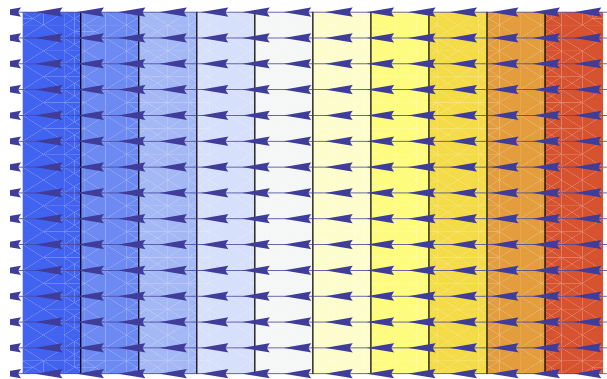



Figura 5.3: Calor numa placa.

[3] A corrente elétrica de magnitude I fluindo através de um fio induz um campo de vetores ao redor do fio, chamado campo magnético.

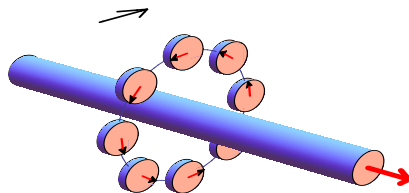



Figura 5.4: Campo magnético.

Quando um campo de vetores apresenta alguma simetria circular, é conveniente representá-lo em coordenadas polares.

[4] Seja $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por:

$$F(x,y) = \big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\big).$$

Usando coordenadas polares:

$$F(r,\theta) = \frac{1}{r}\,(-sen(\theta), cos(\theta)), \quad r > 0.$$

O campo F tem direção igual à do vetor tangente ao círculo de raio r centrado na origem:

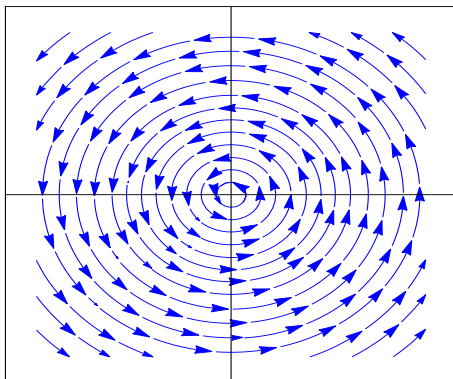



Figura 5.5: Campo do exemplo [4].

Observe que $\|F(r,\theta)\| \to +\infty$ se $r \to 0$ e $\|F(r,\theta)\| \to 0$ se $r \to +\infty$. Este campo de vetores está relacionado ao fenômeno da água escoando de um ralo.

5.2 Campo Radial de Quadrado Inverso

Seja o campo de posição $P(x,y,z) = (x,y,z)$. Definimos o seguinte campo:

$$F(x,y,z) = \frac{k}{\|P(x,y,z)\|^3}\, P(x,y,z),$$

$k \in \mathbb{R}$. F é dito campo radial de quadrado inverso e não é definido na origem. Quanto mais afastado da origem, menor é a norma de F. Se, por exemplo, $k < 0$, o campo F aponta para a origem.

$$\|F(x,y,z)\| = \frac{|k|}{\|P(x,y,z)\|^2}.$$

A norma de F é inversamente proporcional ao quadrado da distância da origem ao ponto (x,y,z).

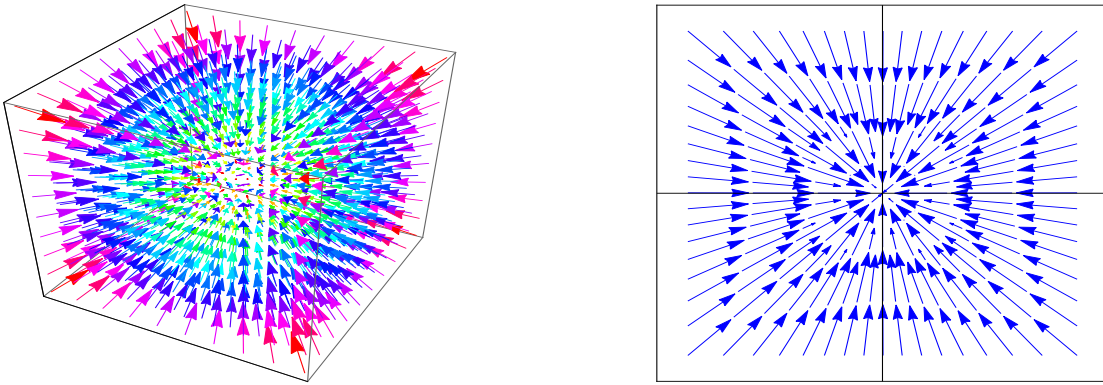



Figura 5.6: Desenho do campo para $k = -1$ e a projeção no plano.

A seguir apresentaremos exemplos de campos radiais de quadrado inverso:

Exemplo 5.2.

[1] A lei de gravitação universal de Newton estabelece que se uma partícula fixa de massa m_0 está localizada na origem do sistema de coordenadas, então a força exercida sobre uma partícula de massa m localizada no ponto (x,y,z) é um campo radial de quadrado inverso, com $k = -G\,m\,m_0$, onde G é a constante gravitacional.

[2] O campo elétrico gerado por uma partícula carregada é um campo radial de quadrado inverso. De fato, a lei de Coulomb estabelece que a força que atua numa partícula de carga q na posição $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, devido a uma carga Q situada na origem, é um campo radial de quadrado inverso, com $k = \varepsilon\, Q\, q$, onde $\varepsilon > 0$.

Definição 5.2. Se F é um campo de vetores contínuo, γ é uma curva do fluxo de F se:

$$\gamma'(t) = F(\gamma(t)).$$

Observação 5.1.

As curvas que formam o fluxo do campo são também chamadas curvas integrais do campo, pois se $F = F_1\,\vec{\mathbf{i}} + F_2\,\vec{\mathbf{j}} + F_3\,\vec{\mathbf{k}}$ representa a velocidade das partículas num fluido, o movimento do fluido é completamente determinado pelo sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \\ \dfrac{dz}{dt} = F_3(x(t), y(t), z(t)); \end{cases}$$

logo, associamos ao campo F um sistema de equações diferenciais ordinárias, cuja solução é o fluxo $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de F.

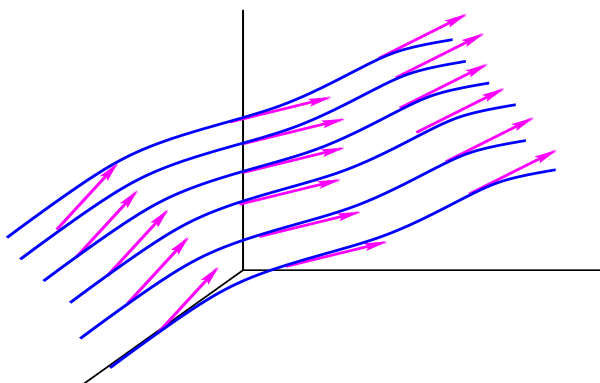



Figura 5.7: Fluxo do campo.

Exemplo 5.3.

[1] Se $F(x, y) = (x, -y)$, então:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(t); \end{cases}$$

logo, a solução é $x(t) = c_1\,e^t$ e $y(t) = c_2\,e^{-t}$, ou, equivalentemente $y = \dfrac{c}{x}$, $x > 0$, $c = c_1 = c_2$ e $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

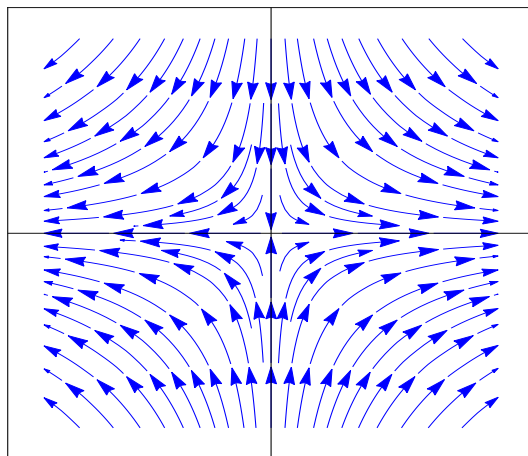



Figura 5.8: Campos do exemplo [1].

[2] Se $F(x,y) = (1,x)$; então:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = x; \end{cases}$$

logo: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\,\dfrac{dt}{dx} = x$, que tem solução $y = \dfrac{x^2}{2} + c$.

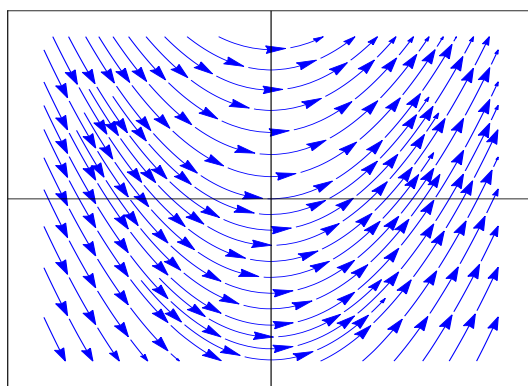



Figura 5.9: Campos do exemplo [2].

[3] Se $F(x,y,z) = (y,-x,0)$, claramente as curvas integrais do campo são parametrizadas por $\gamma(t) = (c_1\,cos(t) + c_2\,sen(t), -c_1\,sen(t) + c_2\,cos(t), c_3)$.

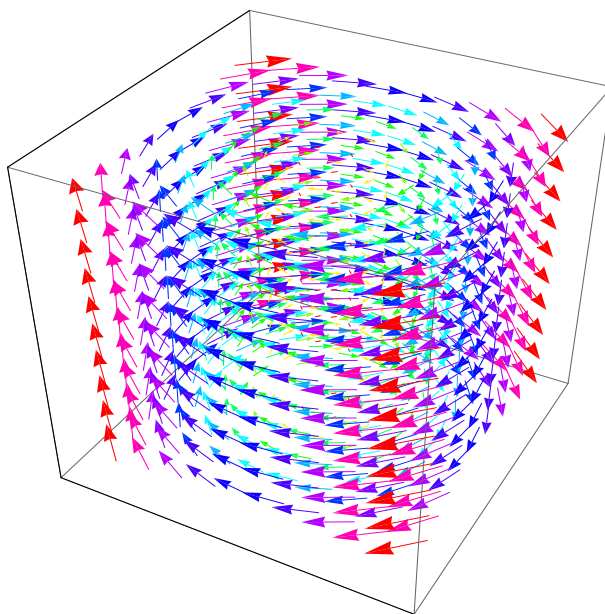



Figura 5.10: Exemplo [3].

[4] O fluxo do campo quadrado inverso é dado por: $\gamma(t) = \sqrt[3]{k\,t}\;\vec{\mathbf{u}}$, onde $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário fixo. De fato:

$$F(\gamma(t)) = \frac{k}{3\,\sqrt[3]{(k\,t)^2}}\,\vec{\mathbf{u}} = \gamma'(t).$$

5.3 Campos Gradientes

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função tal que as derivadas parciais existam.

Definição 5.3. O campo **gradiente** de f é denotado por $grad(f)$ e definido por:

$$\boxed{grad(f(\mathbf{x})) = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\vec{\mathbf{e_i}}}$$

Observações 5.1.

1. No caso $n = 3$, o gradiente de f é:

$$\boxed{grad(f(x,y,z)) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\big)}$$

2. Equivalentemente:

$$\boxed{grad(f(x,y,z)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\vec{\mathbf{k}}}$$

3. Analogamente para $n = 2$:

$$\boxed{grad(f(x,y)) = \big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\big)}$$

4. Equivalentemente:

$$\boxed{grad(f(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\vec{\mathbf{j}}}$$

5. Introduzamos formalmente o símbolo:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{\mathbf{k}},$$

   onde $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$; ∇ é dito um operador, isto é, atua sobre funções com valores em $\mathbb{R}$. Assim:

$$grad(f) = \nabla f.$$

Exemplo 5.4.

[1] Se $f(x,y) = x^2 + y^2$, então: $\nabla f(x,y) = (2\,x, 2\,y)$.

(x,y)	$\nabla f(x,y)$	$\|\nabla f(x,y)\|$
$(0,0)$	$(0,0)$	0
$(1,0)$	$(2,0)$	2
$(x,0)$	$(2x,0)$	$2x$
$(0,y)$	$(0,2y)$	$2y$
$(1,1)$	$(2,2)$	$2\sqrt{2}$
(x,y)	$(2x,2y)$	$2\,\|(x,y)\|$

À medida que o ponto se afasta da origem o comprimento do gradiente cresce e fica igual a duas vezes a distância do ponto à origem.

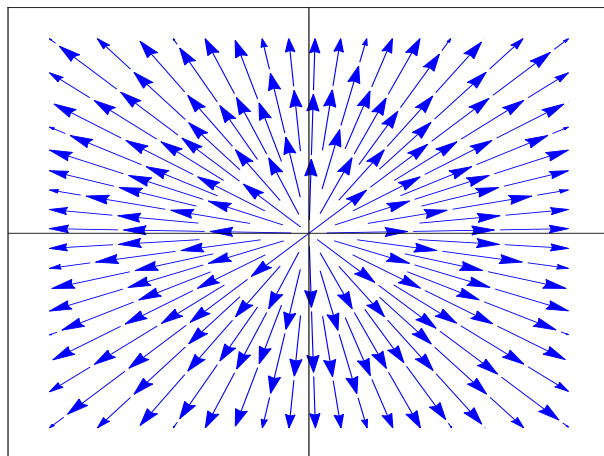



Figura 5.11: Exemplo [1], esboço de ∇f.

[2] Se $f(x,y) = x^2 - y^2$, então: $\nabla f(x,y) = (2\,x, -2\,y)$.

(x,y)	$\nabla f(x,y)$	$\|\nabla f(x,y)\|$
$(0,0)$	$(0,0)$	0
$(1,0)$	$(2,0)$	2
$(x,0)$	$(2x,0)$	$2x$
$(0,y)$	$(0,-2y)$	$2y$
$(1,1)$	$(2,-2)$	$2\sqrt{2}$
(x,y)	$(2x,-2y)$	$2\,\|(x,y)\|$

À medida que o ponto se afasta da origem o comprimento do gradiente cresce ficando igual a duas vezes a distância do ponto à origem.

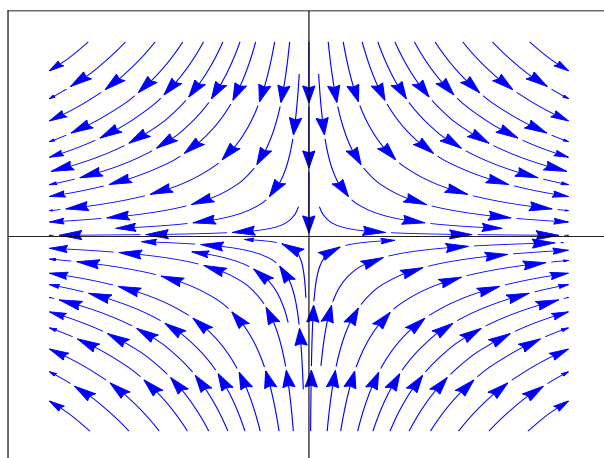



Figura 5.12: Exemplo [2], esboço de $\nabla f C$.

[3] Se $f(x,y) = sen(x)\,sen(y)$, então: $\nabla f(x,y) = (cos(x)\,sen(y), sen(x)\,cos(y))$.

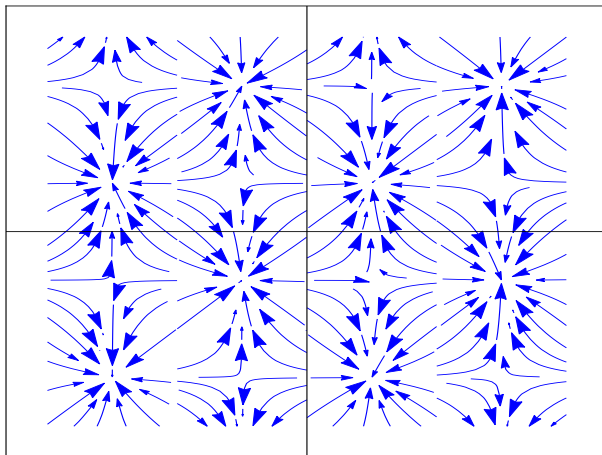



Figura 5.13: Exemplo [3], esboço de ∇f.

[4] Se $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, então: $\nabla f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,(x,y,z)$.

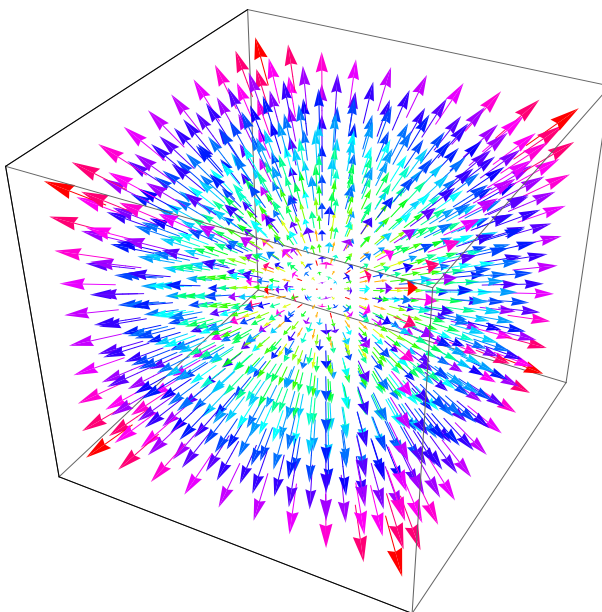



Figura 5.14: Exemplo [4].

5.4 O Rotacional de um Campo de Vetores

O rotacional de um campo de vetores que representa a velocidade de um fluido, está relacionado ao fenômeno de rotação do fluido.

Se consideramos ∇ como um vetor de componentes $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial}{\partial z}$, podemos formalmente considerar o produto vetorial de ∇ pelo campo de vetores $F = (F_1, F_2, F_3)$.

∇ é chamado operador vetorial, isto é, atua sobre funções com valores em $\mathbb{R}$, transformando-as em campos de vetores de $\mathbb{R}^3$.

Definição 5.4. O campo de vetores, chamado **rotacional** do campo de vetores F é denotado por $rot(F)$ e definido por:

$$\boxed{rot\,F = \nabla \times F = \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right]\vec{\mathbf{i}} + \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right]\vec{\mathbf{j}} + \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]\vec{\mathbf{k}}}$$

Exemplo 5.5.

[1] Se $F(x,y,z) = (-y, x, x\,y\,z)$, então:

$$rot\,F(x,y,z) = (x\,z, -y\,z, 2).$$

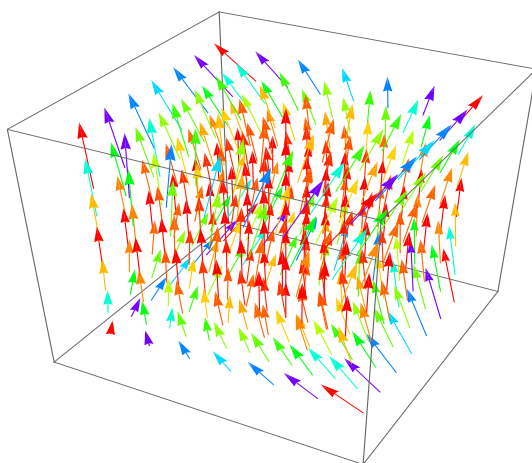



Figura 5.15: $rot(F)$ do exemplo [1].

[2] Se $F(x,y,z) = (x\,y, y\,z, z\,x)$, então $rot\,F(x,y,z) = (-y, -z, -x)$.

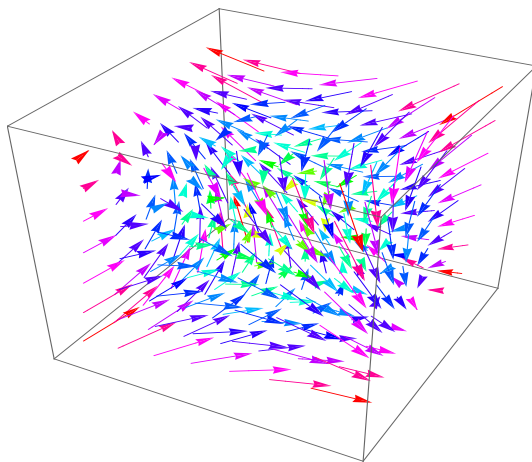



Figura 5.16: $rot(F)$ do exemplo [2].

Proposição 5.1. Se $A \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto e $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, então:

$$\boxed{rot\,(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}}$$

O rotacional de qualquer gradiente é o vetor nulo. A prova sai diretamente do teorema de Schwartz. Veja [**VC**].

Definição 5.5. Se $rot\,F = 0$ dizemos que o campo F é irrotacional.

5.4.1 Interpretação do rot F

Como mencionamos antes, existe uma relação entre rotacional e aspectos rotacionais do movimento.

De fato, seja F um campo de vetores que representa o campo de velocidade de um fluido e consideramos uma partícula situada no ponto (x, y, z). As partículas situadas numa vizinhança deste ponto, tendem a rodar ao redor do eixo formado pelo vetor $rot(F(x, y, z))$; o comprimento deste vetor é a velocidade com que as partículas se movem ao redor deste eixo.

Se $rot(F(x, y, z)) = 0$, o fluido está livre de rotações na vizinhança do ponto (x, y, z):

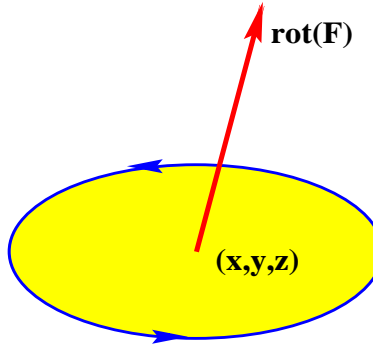



Figura 5.17: Interpretação do rotacional.

5.5 Divergência de um Campo

Se imaginamos um campo de vetores como um campo de velocidades de um gás ou de um fluido, então a divergência do campo está relacionada com a expansão ou a contração do volume do gás pelo fluxo do campo. Veja o teorema de Gauss.

Definição 5.6. O produto escalar formal entre ∇ e F é chamado a divergência do campo F e é denotado e definido por:

$$\boxed{div(F)(x,y,z) = \nabla \cdot F(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)}$$

onde $\cdot$ é o produto escalar em $\mathbb{R}^3$. Analogamente para $n = 2$:

$$\boxed{div(F)(x,y) = \nabla \cdot F(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y)}$$

Exemplo 5.6.

[1] Se $F(x,y,z) = (x\,sen(z), y\,cos(z), z)$, então $div(F)(x,y,z) = sen(z) + cos(z) + 1$.

[2] Se F é o campo radial de quadrado inverso, então

$$div(F)(x,y,z) = 0.$$

[3] Se $F(x,y) = (x,0)$, então $div(F)(x,y) = 1$; o fluxo do campo é dado por:

$$\gamma(t) = (c_1\,e^t, c_2),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R};$$

logo o fluxo é dado por retas paralelas ao eixo dos x. Se pensamos F como campo de velocidade, então a velocidade aumenta quando nos afastamos do eixo dos x; como $divF > 0$, corresponde à expansão.

[4] Se $F(x,y) = (-x,-y)$, então $div(F)(x,y) = -2$; o fluxo do campo é dado por:

$$\gamma(t) = (c_1\, e^{-t}, c_2\, e^{-t}),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R};$$

logo o fluxo é dado por radial apontando para a origem. Se pensamos F como campo de velocidade, como $divF < 0$, corresponde à contração.

[5] Se $F(x,y) = (y,-x)$, então $div(F)(x,y) = 0$, o fluxo do campo é dado por:

$$\gamma(t) = (c_1\, cos(t) + c_2\, sen(t), -c_1\, sen(t) + c_2\, cos(t)),\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R};$$

como $divF = 0$ não tem expansão ou contração.

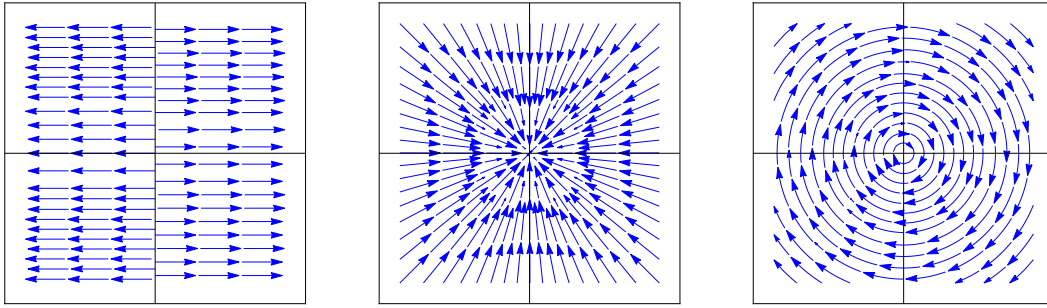



Figura 5.18: Exemplos [3], [4] e [5], respectivamente.

Definição 5.7. Se $div\, F = 0$, dizemos que F é incompressível.

Proposição 5.2. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores. Se F é um campo de vetores de classe C^2, então:

$$\boxed{div\,(rot\, F) = 0}$$

A divergência de qualquer rotacional é zero. A prova segue da definição e do teorema de Schwartz. Veja [**VC**].

5.6 Campos Conservativos

Definição 5.8. F é um campo conservativo se existe $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que as derivadas parciais existem e:

$$\boxed{F = \nabla f}$$

De outro modo, F é conservativo se é um campo gradiente. A função f é chamada função potencial ou potencial do campo F. A importância destes campos de vetores será vista mais adiante.

Proposição 5.3.

1. Para $n = 3$. Se $rot\, F \neq 0$, então F não é um campo gradiente.

2. Para $n = 2$. Se

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) \neq \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y),$$

então F não é conservativo.

Prova: 1. Se F é um campo gradiente, então existe f tal que $\nabla f = F$, logo:

$$rot(F) = rot\, \nabla(f) = \vec{0},$$

o que é uma contradição. A prova de 2. é análoga a de 1.

Exemplo 5.7.

[1] O campo de vetores $F(x, y) = (2\, x\, y, x^2 + 3\, y^2)$ é conservativo pois:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = 2\, x = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y).$$

Seu potencial é $f(x, y) = x^2 y + y^3 + c$, onde $c \in \mathbb{R}$.

[2] O campo de vetores $F(x, y, z) = (e^{yz}, x\, z\, e^{yz}, x\, y\, e^{yz})$ é conservativo pois $rotF = \vec{0}$. Seu potencial é $f(x, y, z) = x\, e^{yz} + c$.

Os exemplos anteriores sugerem que não existe unicidade na determinação de um potencial para um campo de vetores (por exemplo, tome $c = 1$ e $c = 5$).

Definição 5.9. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos se para todo $x,\, y \in A$ existe uma curva $\gamma : [a, b] \to A$ tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

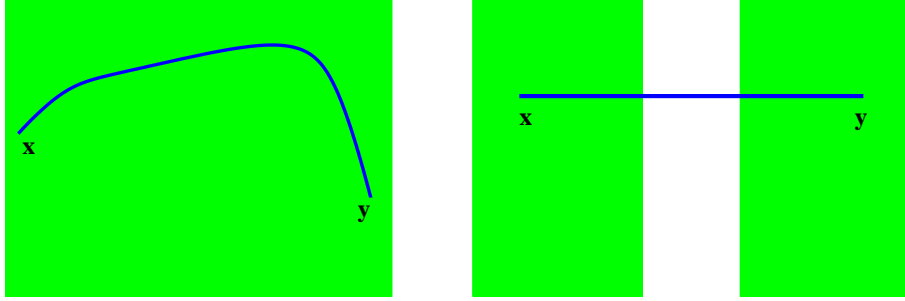



Figura 5.19: Conjunto conexo por caminhos e não conexo por caminhos, respectivamente.

Exemplo 5.8.

[1] $\mathbb{R} - \{0\}$ não é conexo por caminhos, pois se $x = -1$ e $y = 1$, não existe $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $\gamma(a) = -1$ e $\gamma(b) = 1$.

[2] $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ é conexo por caminhos.

Proposição 5.4. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, conexo por caminhos tal que as curvas que ligam os pontos de A sejam diferenciáveis. Se $f,\, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis tais que $\nabla f(p) = \nabla g(p)$ para todo $p \in A$, então existe uma constante k tal que $f(p) = g(p) + k$, para todo $p \in A$.

Prova: Seja $h = f - g$; então $\nabla h(p) = 0$, para todo $p \in A$. Mostraremos que h é constante. Fixando $p \in A$ arbitrariamente, para todo $q \in A$, existe uma curva diferenciável parametrizada por $\gamma : [0, 1] \longrightarrow A$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$, pois A é conexo por caminhos; então, usando a regra da cadeia para a função $h \circ \gamma$:

$$(h \circ \gamma)'(t) = \nabla h(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0,$$

pois $\gamma([0, 1]) \subset A$. Logo $h \circ \gamma$ é constante, para toda γ; então, h é constante e temos que $f(p) = g(p) + k$, para todo $p \in A$.

5.7 Determinação do Potencial de um Campo Conservativo

Em relação à existência (local) do potencial, vejamos as diferenças que existem em dimensões 2 e 3:

5.7.1 Campos Conservativos no Espaço

Seja $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, um campo de vetores de classe C^1. Se $rot\, F = 0$, então F é conservativo. (A recíproca é imediata.)

A prova de ambos os fatos será mostrada nos capítulos seguintes. No momento daremos uma forma prática para determinar o potencial de um campo de vetores F:

Sejam $F_i = F_i(x, y, z)$ as componentes do campo F e:

1. $M = M(x, y, z) = \displaystyle\int F_1\, dx.$

2. $N = N(x, y, z) = \displaystyle\int \left[F_2 - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dy.$

3. $L = L(x, y, z) = \displaystyle\int \left[F_3 - \frac{\partial (M+N)}{\partial z}\right] dz.$

O potencial do campo F é dado por;

$$f(x, y, z) = M(x, y, z) + N(x, y, z) + L(x, y, z) + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$. A prova deste fato é um exercício simples de integração.

5.7.2 Campos Conservativos no Plano

Se $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo de vetores de classe C^1 tal que as componentes de F satisfazem:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

então F é conservativo. O potencial de F é:

$$f(x, y) = \int F_1\, dx + \int \left[F_2 - \int \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\right] dy + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.9.

[1] Seja $F(x, y, z) = (y\, cos(x\, y), x\, cos(x\, y) + 2\, y\, z^3, 3\, y^2\, z^2)$; F está definido em todo $\mathbb{R}^3$; então $rot\, F = (0, 0, 0)$; logo o campo é conservativo e:

$$M(x,y,z) = \int y\,cos(x\,y)\,dx = sen(x\,y),$$
$$N(x,y,z) = \int 2\,y\,z^3\,dy = y^2\,z^3;$$

por outro lado:

$$F_3 - \frac{\partial(M+N)}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad L(x,y,z) = 0.$$

Então, o potencial do campo é:

$$f(x,y,z) = y^2\,z^3 + sen(x\,y) + c.$$

[2] Seja $F(x,y,z) = (6\,x, 2\,z, 2\,y)$; F está definido em todo $\mathbb{R}^3$; então $rot\,F = (0,0,0)$, logo o campo é conservativo e:

$$M(x,y,z) = \int 6\,x\,dx = 3\,x^2,$$
$$N(x,y,z) = \int 2\,z\,dy = 2\,y\,z;$$

por outro lado:

$$F_3 - \frac{\partial(M+N)}{\partial z} = 0$$

e $L(x,y,z) = 0$. Então, o potencial do campo é:

$$f(x,y,z) = 3\,x^2 + 2\,y\,z + c.$$

[3] Seja $F(x,y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$, F está definido em todo $\mathbb{R}^2$; então:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2\,x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,x\,y;$$

logo:

$$f(x,y) = \int 2\,x\,y\,dx + \int (x^2 + 3y^2 - \int 2\,x\,dx)dy + c$$
$$= x^2\,y + y^3 + c.$$

[4] Seja $F(x,y,z) = (y^2\,cos(x), 2\,y\,sen(x) + e^{2z}, 2\,y\,e^{2z})$; F está definido em todo $\mathbb{R}^3$; então $rot\,F = (0,0,0)$, logo o campo é conservativo e:

$$M(x,y,z) = y^2\,sen(x),$$
$$N(x,y,z) = y\,e^{2\,z};$$

por outro lado, $F_3 - \dfrac{\partial(M+N)}{\partial z} = 0$ e $L(x,y,z) = 0$. Então, o potencial do campo é:

$$f(x,y,z) = y\,(e^{2\,z} + y\,sen(x)) + c.$$

[5] Seja $F(x,y,z) = (x^2, z\,cos(y\,z), y\,cos(y\,z))$; F esta definido em todo $\mathbb{R}^3$; então:

$$rot\,F = (0,0,0),$$

logo o campo é conservativo e:

$$M(x,y,z) = \frac{x^3}{3},$$
$$N(x,y,z) = sen(y\,z);$$

por outro lado,

$$F_3 - \frac{\partial(M+N)}{\partial z} = 0,$$

$$L(x,y,z) = 0.$$

Então, o potencial do campo é:

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + sen(y\,z) + c.$$

[6] O campo radial de quadrado inverso é conservativo. As coordenadas do campo são:

$$F_1(x,y,z) = \frac{k\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_2(x,y,z) = \frac{k\,y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$F_3(x,y,z) = \frac{k\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Então,

$$M(x,y,z) = \int \frac{k\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx;$$

fazendo $u = x^2 + y^2 + z^2$, $du = 2\,x\,dx$ e:

$$M(x,y,z) = \frac{k}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}\,du = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Por outro lado, $N(x,y,z) = L(x,y,z) = 0$. Logo, o potencial é:

$$f(x,y,z) = -\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c.$$

Nos capítulos seguintes, daremos uma caracterização completa dos campos conservativos.

5.8 Exercícios

1. Determine a divergência e o rotacional dos seguintes campos de vetores:

   (a) $F(x,y,z) = (x\,y^2, z\,x^2, x)$

   (b) $F(x,y,z) = (x+y+z, x^2, y\,z)$

   (c) $F(x,y,z) = (x^2+y^3+z^4, x\,y\,z, x\,z+y\,z)$

   (d) $F(x,y,z) = (x\,y\,z^2, x\,y^3\,z, -x\,y\,z^3)$.

   (e) $F(x,y,z) = (cos(x)\,sen(y), cos(x\,z), sen(y\,z))$

   (f) $F(x,y,z) = (e^x\,cos(y), e^x\,sen(y), 0))$

   (g) $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x\,y, x\,y\,z)$.

   (h) $F(x,y,z) = (x\,y^2\,z, 2\,x\,y^2\,z, 3\,x\,y^2\,z)$

   (i) $F(x,y,z) = (cos(x\,y), cos(y\,z), sen(x\,z))$.

2. Sejam $F(x,y,z) = (e^x\,y, e^y\,x, z^2)$ e $G(x,y,z) = (x,y,z)$, calcule:

   (a) $\nabla \times \big(F \times G\big)$

   (b) $\big(\nabla \times F\big) \times G$

   (c) $\big(\nabla \times F\big) \cdot \big(F \times \nabla g\big)$

   (d) $\big(\nabla \times F\big) \times \big(\nabla \times G\big)$

3. Determine se os seguintes campos são conservativos e, em caso afirmativo, ache seu potencial:

   (a)) $F(x,y,z) = (2\,x\,z+y^2, 2\,x\,y, e^z+x^2)$

   (b) $F(x,y,z) = (x\,y, e^x, e^z)$

   (c) $F(x,y,z) = (ln(x\,y), ln(y\,z), ln(z\,x))$

   (d) $F(x,y,z) = (e^x, 2\,e^y, 3\,e^z)$

   (e) $F(x,y) = (10\,x\,y + y\,sen(x\,y) + x\,sen(x\,y), 5\,x^2)$

(f) $F(x,y,z) = (1 + y\, sen(x\, z), 1 - cos(x\, z), z)$

(g) $F(x,y,z) = (6\, x\, y + z^3, 3\, x^2 - z, 3\, x\, z^2 - y)$

4. Denotamos e definimos o Laplaciano de uma função $f = f(x,y,z)$, de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ por:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Analogamente em $\mathbb{R}^2$. Verifique as seguintes identidades:

(a) $\nabla(fg) = g\,\nabla(f) + f\,\nabla(g)$.

(b) $div(f\,F) = f\,div(F) + grad(f)\cdot F$

(c) $div(f\,grad(f)) = f\,\Delta(f) - \|grad(f)\|^2$

(d) $\Delta(f) = div(grad(f))$.

(e) $rot(rot(F)) = grad(div(F)) - \big(\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3\big)$, onde $F = (F_1, F_2, F_3)$.

(f) $\Delta(f\,g) = f\,\Delta g + g\,\Delta f + 2\,\nabla f\cdot\nabla g$

(g)) $div(F\times G) = G\,rot(F) - F\,rot(G)$.

(h) $div(f\,grad(f) - g\,grad(f)) = f\,\Delta(g) - g\,\Delta(f)$.

5. Uma função $f = f(x,y,z)$, de classe C^2 em $\mathbb{R}^3$ é dita harmônica se $\Delta f = 0$ (analogamente em $\mathbb{R}^2$). Verifique que as seguintes funções são harmônicas:

(a) $f(x,y,z) = x\,z + ln(x\,y)$

(b) $f(x,y,z) = e^x\,cos(y) + e^y\,cos(z)$

(c) $f(x,y,z) = x^2 - \dfrac{y^2+z^2}{2}$

(d)) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

6. Seja $\vec{\mathbf{v}}$ um vetor fixo não nulo em $\mathbb{R}^3$ e $f = f(t)$, $t > 0$ uma função derivável. Defina a função $u(x,y,z) = f(\|\vec{\mathbf{v}} \times P(x,y,z)\|)$ e o campo de vetores V definido por:

$$V(x,y,z) = u(x,y,z)\,\vec{\mathbf{v}} \times P(x,y,z),$$

onde P é o vetor posição:

   (a) Calcule $grad(u)$.

   (b) Verifique que $div(V) = 0$.

   (c) Determine f tal que V seja irrotacional.

7. Ache o valor das constantes a, b e c tais que o campo de vetores seja irrotacional:

   (a) $F(x,y,z) = (a\,x\,y - z^3, (a-2)\,x^2, (1-a)\,x\,z^2)$.

   (b) $F(x,y,z) = (x + 2\,y + a\,z, b\,x - 3\,y - z, 4\,x + c\,y + 2\,z)$.

8. Seja $\vec{\mathbf{w}}$ um vetor constante, P o vetor posição e $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} \times P$. Verifique que $div(\vec{\mathbf{v}}) = 0$.

9. Seja $F(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2}\,(x,y)$ se $(x,y) \neq (0,0)$:

   (a) Verifique que F é conservativo.

   (b) Ache o potencial de F.

   (c) Verifique que $div(F) = 0$.

10. Verifique que todo campo de vetores da forma $F(x,y,z) = (A(x), B(y), C(z))$, onde A, B e C são funções diferenciáveis, é irrotacional.

11. Seja P o vetor posição e $F(\mathbf{x}) = \dfrac{P(\mathbf{x})}{\|P(\mathbf{x})\|^m}$. É possível achar m tal que $div(F(\mathbf{x})) = 0$? Justifique.

12. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função par de classe C^1. Verifique que $\nabla f(\vec{0}) = \vec{0}$.

13. Seja $F(x,y) = \Big(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big)$.

(a) Verifique que o fluxo do campo F é $\gamma(t) = t\,\vec{\mathbf{u}}$, onde $\vec{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$ é um vetor unitário fixo.

(b) Verifique se o fluxo de F expande ou contrai, fora da origem.

(c) Esboce o campo F,

14. Seja $f(x, y) = (4\,x, 2\,y)$.

    (a) Ache o fluxo de F.

    (b) F é conservativo? Caso afirmativo, ache seu potencial.

Capítulo 6

INTEGRAIS

6.1 Integrais sobre Trajetórias

Sejam $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização da curva C de classe C^1, tais que

$$f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$$

é uma função contínua.

Definição 6.1. A integral de f ao longo de γ é denotada e definida por:

$$\boxed{\int_C f = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\;dt}$$

Definição 6.2.

1. A definição anterior é valida se γ é C^1 por partes ou $f \circ \gamma$ é contínua por partes.

2. De fato, subdividamos o intervalo original num número finito de subintervalos fechados tal que $f(\gamma)\,\|\gamma'\|$ é uma função contínua em cada subintervalo. Consideremos $a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n = b$ a partição tal que γ_i é a restrição de γ ao subintervalo $I_i = [t_i, t_{i+1}]$. Denotando por $C_i = \gamma_i(I_i)$, temos:

$$\int_C f = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f + \ldots\ldots + \int_{C_n} f.$$

3. Esta integral é a generalização natural do comprimento de arco para curvas. Se $f(x,y,z) = 1$ para todo (x,y,z), a integral de linha é o comprimento de arco da curva C.

$$\int_C 1 = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

4. Se C é uma curva plana parametrizada por γ e $f(x,y) \geq 0$, a integral de f ao longo de γ representa a área da "cerca"de base C e altura $f \circ \gamma$, em cada $(x(t), y(t)) \in \gamma$.

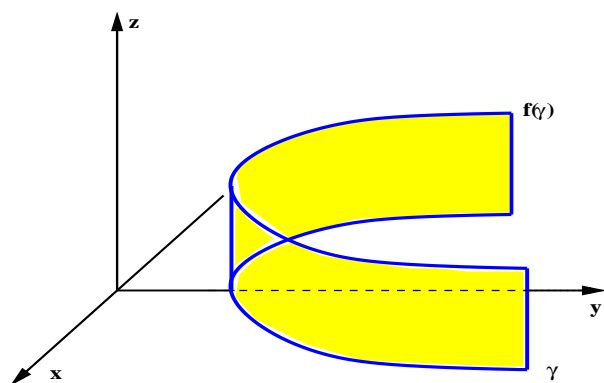



Figura 6.1: "Cerca"de base C.

Exemplo 6.1.

[1] Calcule $\displaystyle\int_\gamma f$ se $\gamma(t) = (t^2, t^3, 0)$ tal que $t \in [-1,1]$ e $f(x,y,z) = 1 + x\,y\,z$.

$f(\gamma(t)) = f(t^2, t^3, 0) = 1$, $\gamma'(t) = (2\,t, 3\,t^2, 0)$ e $\|\gamma'(t)\| = t\,\sqrt{4 + 9\,t^2}$, logo:

$$\int_\gamma f = \int_{-1}^1 t\,\sqrt{4 + 9\,t^2}\,dt = \frac{26\,\sqrt{13} - 16}{27}.$$

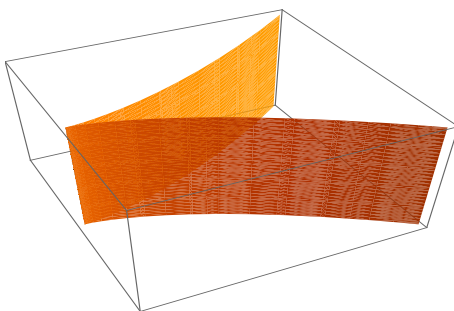



Figura 6.2: Exemplo [1].

[2] Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} f$ se $\gamma(t) = (t, 3\,t, 2\,t)$ tal que $t \in [1,3]$ e $f(x,y,z) = y\,z$.

$f(\gamma(t)) = f(t, 3\,t, 2\,t) = 6\,t^2$, $\gamma'(t) = (1,3,2)$ e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{14}$, logo:

$$\int_{\gamma} f = 6\sqrt{14}\int_1^3 t^2\,dt = 52\sqrt{14}.$$

[3] Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} f$ se $\gamma(t) = (1, 2, t^2)$ tal que $t \in [0,1]$ e $f(x,y,z) = e^{\sqrt{z}}$.

$f(\gamma(t)) = f(1,2,t^2) = e^t$, $\gamma'(t) = (0,0,2\,t)$ e $\|\gamma'(t)\| = 2\,t$; logo:

$$\int_{\gamma} f = 2\int_0^1 t\,e^t\,dt = 2.$$

[4] Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} f$, onde γ é a hélice parametrizada por $\gamma(t) = (a\,cos(t), a\,sen(t), a\,t)$ tal que $t \in [0, 4\,\pi]$, $(a > 0)$ e $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z-a^2}$.

$f(\gamma(t)) = f(a\,cos(t), a\,sen(t), a\,t) = e^{at}$, $\gamma'(t) = (-a\,sen(t), a\,cos(t), a)$ e $\|\gamma'(t)\| = a\sqrt{2}$; logo:

$$\int_{\gamma} f = a\sqrt{2}\int_0^{4\pi} e^{at}\,dt = \sqrt{2}\,(e^{4a\pi} - 1).$$

Se consideramos a hélice como um arame e f como densidade de massa; então, a massa total do arame é $\sqrt{2}\,(e^{4a\pi} - 1)$.

Definição 6.3. Definimos o valor médio da função f ao longo da curva parametrizada γ pelo número:

$$M = \frac{1}{L(\gamma)}\int_{\gamma} f.$$

No exemplo 4), temos: $L(\gamma) = a\sqrt{2}\displaystyle\int_0^{4\pi} dt = 4\sqrt{2}\,a\,\pi$. Se f representa a temperatura, a média da temperatura no arame é:

$$M = \frac{e^{4a\pi} - 1}{4\,a\,\pi}.$$

6.2 Integrais de Linha de Campos de Vetores

Em Física, o trabalho realizado por uma força constante F para deslocar uma partícula ao longo de um segmento de reta entre os pontos A e B é definido como o produto da força pelo deslocamento na direção da força. Denotando por $W(F)$ o trabalho realizado, temos:

$$\boxed{W(F) = F \cdot \overrightarrow{AB}}$$

Suponhamos que a trajetória de uma partícula seja o traço da curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^1 (não necessariamente um segmento de reta) e F um campo de vetores contínuo. Consideremos a seguinte partição de ordem n de $[a,b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ \ldots\ldots\ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

e construamos a poligonal de vértices $\gamma_i = \gamma(t_i)$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots..n$.

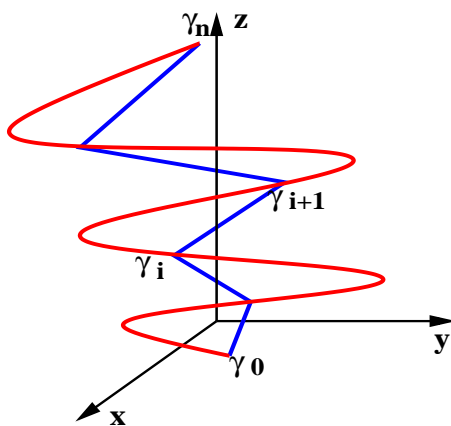



Figura 6.3:

Se n é grande ($n \to +\infty$), a poligonal aproxima-se da curva $C = \gamma(I)$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ é pequeno e o deslocamento da partícula de γ_i até γ_{i+1} é aproximado pelo vetor:

$$\vec{v_i} = \gamma_{i+1} - \gamma_i.$$

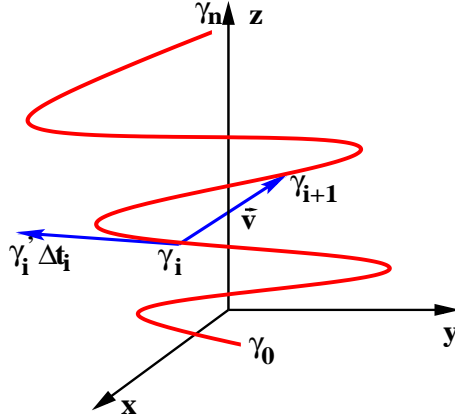



Figura 6.4:

Para n grande, da definição de vetor tangente:

$$\vec{v_i} \cong \gamma_i^{'} \Delta t_i.$$

Por outro lado, $F(\gamma(t))$ é quase constante no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ e:

$$F(\gamma_i) \cdot \vec{v_i} \cong F(\gamma_i) \cdot \gamma_i^{'} \Delta t_i.$$

A soma de Riemann:

$$W_n(F) = \sum_{i=1}^{n} F(\gamma_i) \cdot \gamma_i^{'} \Delta t_i$$

é uma boa aproximação do trabalho total realizado pela força F para deslocar a partícula; então, é natural definir o trabalho realizado por F para deslocar a partícula ao longo de C de $\gamma(a) = A$ até $\gamma(b) = B$ por:

$$W(F) = \lim_{|\Delta t_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\gamma_i) \cdot \gamma_i^{'} \Delta t_i,$$

que é a integral de Riemann da função contínua $(F \circ \gamma)(t)$ no intervalo $[a, b]$; então:

$$W(F) = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt,$$

se o limite existe. É possível provar que se o limite existe, independe da escolha da partição e da parametrização.

Sejam $F : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores contínuo e $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização da curva C de classe C^1 tal que $\gamma\big([a, b]\big) \subset A$ e $F \circ \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ seja uma função contínua.

Definição 6.4. A integral de linha de F ao longo de C é denotada e definida por:

$$\boxed{\int_C F = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}$$

onde $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ é o produto escalar em $\mathbb{R}^n$ dos vetores $F(\gamma(t))$ e $\gamma'(t)$.

Observações 6.1.

1. A definição é valida se $F \circ \gamma$ é contínua por partes.

2. A integral de linha de F ao longo de C poder ser calculada como uma integral de trajetória para uma f apropriada.

3. De fato, seja $\vec{\mathbf{t}}(t)$ o vetor tangente unitário a $\gamma(t)$, que suporemos não nulo para todo t; então:

$$f(\gamma(t)) = F(\gamma(t)) \cdot \vec{\mathbf{t}}(t) = F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|},$$

que é a componente de F tangente à curva, ou equivalentamente, a componente de F é a projeção de F sobre o vetor tangente unitário à curva; logo:

$$\int_C F = \int_a^b \big(F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma(t)\|}\big)\, \|\gamma'(t)\|\, dt.$$

6.3 Notações

É comum usar as seguintes notações:

6.3.1 No Espaço

Sejam F_1, F_2 e F_3 as componentes do campo F e a curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$; então:

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F_1(\gamma(t))\, \frac{dx}{dt} + F_2(\gamma(t))\, \frac{dy}{dt} + F_3\, (\gamma(t))\frac{dz}{dt};$$

logo:

$$\boxed{\int_C F = \int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \int_a^b F_1(t)\, dx + F_2(t)\, dy + F_3(t)\, dz}$$

6.3.2 No Plano

De forma análoga obtemos:

$$\boxed{\int_C F = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy}$$

Se $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma parametrização de uma curva fechada, então é comum denotar a integral de linha de um campo F ao longo de γ como:

$$\boxed{\oint_C F}$$

Em Eletromagnetismo, $\displaystyle\oint_C F$ é chamada de circulação do campo F ao longo da curva C.

Exemplo 6.2.

[1] Calcule $\displaystyle\int_C F$ se $F(x,y) = (x^2, x\,y)$ e C é a curva definida por $x = y^2$ ligando os pontos $(1,-1)$ e $(1,1)$.

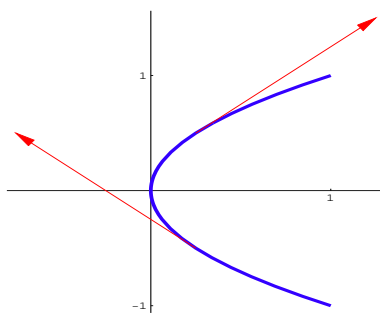



Figura 6.5: Exemplo [1].

A parametrização da parábola C é $\gamma(t) = (t^2, t)$, $-1 \le t \le 1$; seu vetor tangente é $\gamma'(t) = (2\,t, 1)$, $F(\gamma(t)) = (t^4, t^3)$ e $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 2\,t^5 + t^3$; então:

$$\int_C F = \int_{-1}^{1} (2\,t^5 + t^3)\,dt = 0.$$

[2] Calcule $\displaystyle\int_C F$ se $F(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big)$ e C é um arco de círculo de raio 3, do ponto $(3,0)$ até $\Big(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\Big)$. Resolvamos os sistemas:

$$\begin{cases} 3\,cos(t) = 3 \\ 3\,sen(t) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} 3\,cos(t) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ 3\,sen(t) = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Logo, $t = 0$ e $t = \dfrac{\pi}{6}$. Então, a parametrização da curva é: $\gamma(t) = (3\,cos(t), 3\,sen(t))$, $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{6}$:

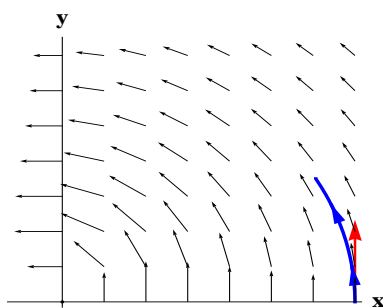



Figura 6.6: Exemplo [2].

O vetor tangente a γ é $\gamma'(t) = 3\,(-sen(t), cos(t))$, $F(\gamma(t)) = \dfrac{1}{3}(-sen(t), cos(t))$; logo temos que $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 1$; então:

$$\int_C F = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6}.$$

[3] Calcule $\displaystyle\int_C cos(z)\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz$, se C é dada por:

$$\gamma(t) = (1, t, e^t), \quad 0 \leq t \leq 2.$$

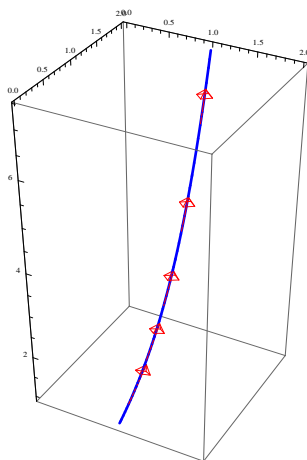



Figura 6.7: γ do exemplo [3].

Temos $\dfrac{dx}{dt} = 0$, $\dfrac{dy}{dt} = 1$ e $\dfrac{dz}{dt} = e^t$, logo:

$$\int_C cos(z)\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz = \int_0^2 (0 + e + e^{2\,t})dt = 2\,e + \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}.$$

[4] Calcule $\displaystyle\int_C sen(z)\,dx + cos(z)\,dy - \sqrt[3]{x\,y}\,dz$, onde C é a curva parametrizada por:

$$\gamma(t) = (cos^3(t), sen^3(t), t), \quad 0 \le t \le \frac{7\,\pi}{2}.$$

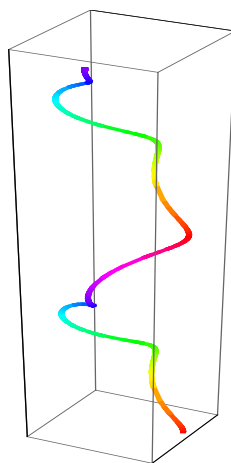



Figura 6.8: γ do exemplo [4].

Temos $\dfrac{dx}{dt} = -3\,cos^2(t)\,sen(t)$, $\dfrac{dy}{dt} = 3\,sen^2(t)\,cos(t)$ e $\dfrac{dz}{dt} = 1$, logo:

$$\int_C sen(z)\,dx + cos(z)\,dy - \sqrt[3]{x\,y}\,dz = -\int_0^{\frac{7\pi}{2}} \big(cos(t)\,sen(t)\big)\,dt = -\frac{1}{2}.$$

[5] Calcule $\displaystyle\int_C x^2\,dx + x\,y\,dx + dz$, se C é dada por $\gamma(t) = (t, t^2, 1)$, $0 \leq t \leq 1$.

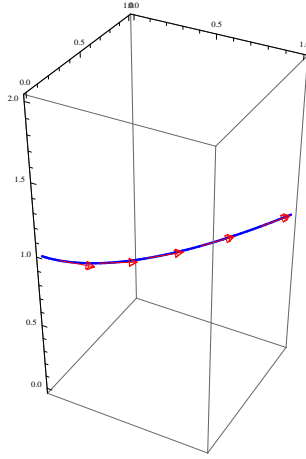



Figura 6.9: γ do exemplo [5].

$F(x,y,z) = (x^2, x\,y, 1)$, $F(\gamma(t)) = F(t, t^2, 1) = (t^2, t^3, 1)$ e $\gamma'(t) = (1, 2\,t, 0)$; então:

$$\int_C x^2\,dx + x\,y\,dx + dz = \int_0^1 (t^2 + 2\,t^4)\,dt = \frac{11}{15}.$$

6.4 Integrais de Linha e Reparametrizações

Seja C uma curva com parametrização $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma reparametrização de classe C^1 da curva C. Então, existe:

$$h : [c,d] \longrightarrow [a,b]$$

de classe C^1, bijetiva tal que:

$$\boxed{\beta = \gamma \circ h}$$

Onde, h pode ser crescente, $h(c) = a$ e $h(d) = b$ ou h pode ser decrescente, $h(d) = a$ e $h(c) = b$.

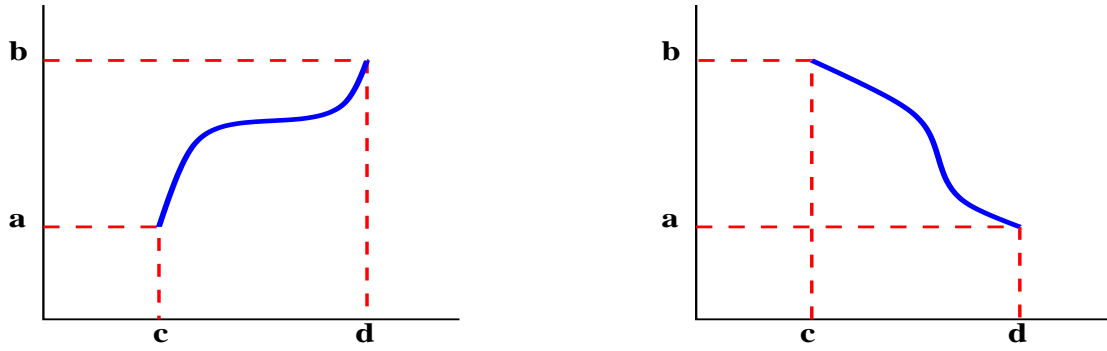



Figura 6.10: h crescente e decrescente, respectivamente.

Definição 6.5.

1. Se h é crescente, então dizemos que β preserva a orientação, isto é, uma partícula que percorre uma trajetória com a parametrização γ, move-se na mesma direção que a partícula que percorre a trajetória com a parametrização β.

2. Se h é decrescente, então dizemos que β inverte a orientação, isto é, uma partícula que percorre uma trajetória com a parametrização γ, move-se na direção contrária à da partícula que percorre a trajetória com a parametrização β.

Sejam $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma parametrização diferenciável da curva C ligando o ponto $\gamma(a)$ ao ponto $\gamma(b)$ e $h : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ tal que $h(t) = a+b-t$; definamos a curva C^- pela parametrização $\gamma^- : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\boxed{\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)}$$

C^- é a curva que liga $\gamma(b)$ a $\gamma(a)$. γ e γ^- têm o mesmo traço, mas são percorridas em sentidos opostos.
No plano:

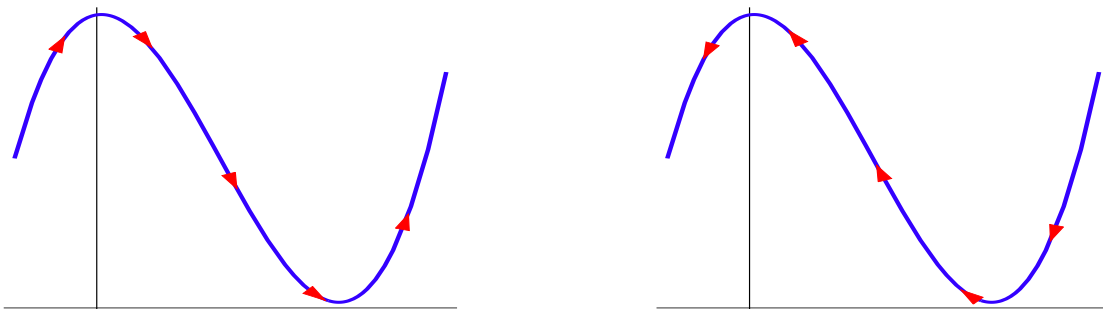



Figura 6.11: Gráficos de C^+ e C^-, respectivamente.

No espaço:

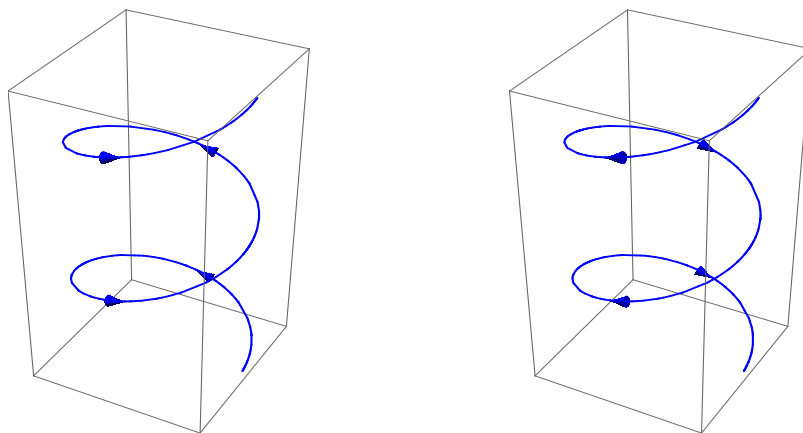



Figura 6.12: Gráficos de C^{+} e C^{-}, respectivamente.

Exemplo 6.3.

[1] Seja C o segmento de reta ligando a origem e o ponto $(1,1)$; então C pode ser parametrizado por:

$$\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^{2}\quad \text{tal que}\quad \gamma(t)=(t,t).$$

Fazendo $h(t)=1-t$, então $\gamma^{-}(t)=\gamma(h(t))=(1-t,1-t)$, $\gamma^{-}(0)=(1,1)$ e $\gamma^{-}(1)=(0,0)$

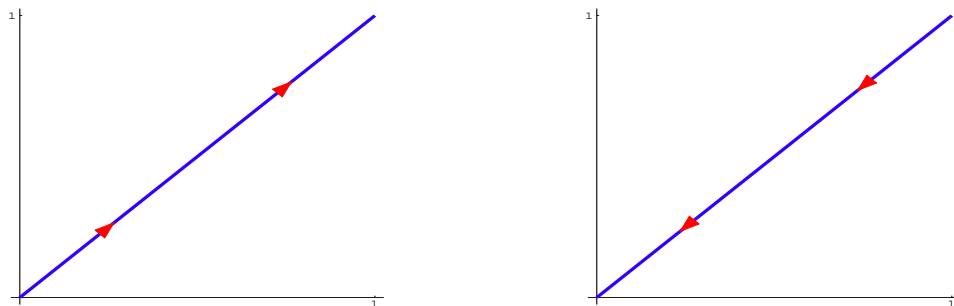



Figura 6.13: Gráficos de C^{+} e C^{-}, respectivamente.

[2] Seja C o círculo unitário; então C pode ser parametrizado por:

$$\gamma(t)=(cos(t),sen(t)),\quad t\in[0,2\pi];$$

fazendo $h(t)=2\pi-t$, então:

$$\gamma^{-}(t)=\gamma(h(t))=(cos(2\pi-t),sen(2\pi-t))=(cos(t),-sen(t)).$$

Note que $\gamma'(t) = (-sen(t), cos(t))$ e $\gamma'^{-}(t) = (-sen(t), -cos(t))$.

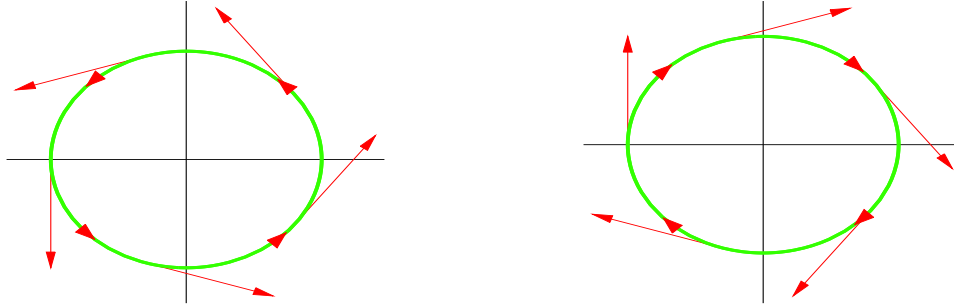



Figura 6.14: Gráficos de C^+ e C^-, respectivamente.

A escolha de um sentido para o vetor tangente a uma curva é chamada orientação da curva; logo, toda curva diferenciável tem duas possíveis orientações. De fato, Seja C uma curva diferenciável parametrizada por $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$. Podemos definir o campo (contínuo) tangente unitário, por:

$$T(p) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

onde $\gamma(t) = p$, $t \in (a, b)$ e tal que $\lim\limits_{t \to a^+} T(p)$ e $\lim\limits_{t \to b^-} T(p)$ existem. No caso de uma curva fechada, estes limites devem ser iguais.

$-T$ também é uma orientação de C; por continuidade, temos que uma curva possui duas orientações possíveis. As mudanças de orientação são refletidas na integral de linha.

Teorema 6.1. Sejam F um campo de vetores, C uma curva de classe C^1 com parametrização γ tal que $F \circ \gamma$ é contínua e σ uma reparametrização de C.

1. Se σ preserva orientação e $\sigma(I) = L$, então:

$$\boxed{\int_C F = \int_L F}$$

2. Se σ inverte orientação, então:

$$\boxed{\int_C F = -\int_L F}$$

Em particular:

$$\boxed{\int_C F = -\int_{C^-} F}$$

Prova: Por hipotese, existe h tal que $\gamma = \sigma \circ h$; então $\gamma'(t) = \sigma'(h(t)) \cdot h'(t)$. Logo:

$$\int_C F = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F(\sigma(h(t))) \cdot \sigma'(h(t)))h'(t)\, dt;$$

fazendo a mudança de variáveis $s = h(t)$, temos:

$$\int_C F = \int_{h(a)}^{h(b)} (F(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s))\, ds.$$

Dependendo de h preservar ou inverter a orientação, provamos o teorema.

Logo, a integral de linha depende do campo e da parametrização da curva.

Proposição 6.1.

1. **Linearidade:** Sejam a, $b \in \mathbb{R}$, F, G campos de vetores e C uma curva de classe C^1; então:

$$\boxed{\int_C a\, F + b\, G = a \int_C F + b \int_C G}$$

2. **Aditividade:** Se C admite uma decomposição em n curvas C_i, $i = 1....n$, então:

$$\boxed{\int_C F = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} F}$$

As provas destas propriedades seguem da definição de integral de linha.

Proposição 6.2. Seja F um campo gradiente com potencial f, de classe C^1 e C uma curva de classe C^1 que liga os pontos P e Q; então:

$$\boxed{\int_C F = f(Q) - f(P)}$$

A integral dos campos gradientes não depende da curva que liga os pontos P e Q, somente depende dos pontos. Em particular:

$$\boxed{\oint_C F = 0}$$

Prova: Seja γ uma parametrização de classe C^1 de C tal que $\gamma(a) = P$, $\gamma(b) = Q$ e $H(t) = f(\gamma(t))$; pela regra da cadeia, $H'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Utilizando o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_C F = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b H'(t)\, dt = H(b) - H(a) = f(Q) - f(P).$$

Exemplo 6.4.

[1] Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde F é o campo de quadrado inverso e C é parametrizada por:

$$\gamma(t) = \Big(\frac{t^4}{4}, sen^3\big(\pi\, t\big), 0\Big), \quad t \in [1,2].$$

Sabemos que F é um campo gradiente com potencial $f(x,y,z) = \dfrac{-k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; por outro lado $P = \gamma(1) = \big(\dfrac{1}{4}, 0, 0\big)$ e $Q = \gamma(2) = (4,0,0)$; logo:

$$\int_C F = f(4,0,0) - f\big(\frac{1}{4}, 0, 0\big) = \frac{15\,k}{4}.$$

[2] Sejam $F(x,y) = (x^2, x\,y)$ e C a curva formada pelo arco de parábola $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ e pelo segmento de reta que liga $(1,1)$ e $(0,0)$. Calcule $\displaystyle\int_C F$.

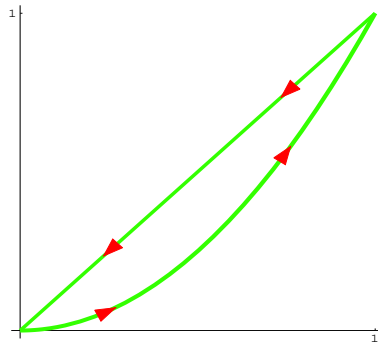



Figura 6.15: Exemplo [2].

A curva C admite uma decomposição em 2 curvas C_1 e C_2, com parametrizações dadas por $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ e $\gamma_2(t) = (1-t, 1-t)$, $0 \le t \le 1$, então:

$$\int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F = \int_{C_1} F - \int_{C_2^-} F = \int_C F = \int_0^1 (-t^2 + 2t^4)\, dt = \frac{1}{15},$$

onde $\gamma_2^-(t) = (t,t)$, $0 \le t \le 1$.

[3] Seja F o campo radial de quadrado inverso, para $k = -1$. Calcule: $\int_C F$, onde C é a curva obtida pela interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 4$.

A superfície $x^2 + y^2 = 1$ é um cilindro circular reto; logo a interseção do cilindro com o plano $z = 4$ é um círculo de raio 1, que pode ser parametrizado por

$$\gamma(t) = (cos(t), sen(t), 4), \quad t \in [0, 2\pi].$$

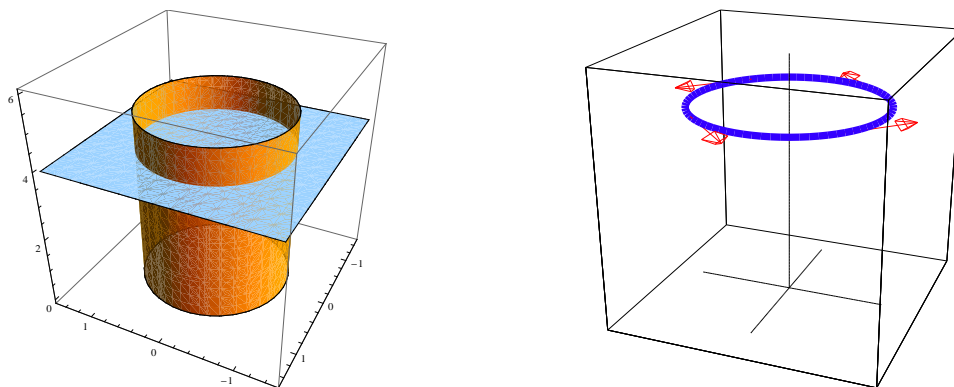



Figura 6.16: Exemplo [3].

$\gamma'(t) = (-sen(t), cos(t), 0)$ e $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$; então $\oint_C F = 0$.

[4] Seja $F(x, y) = (x\,y, x^2)$. Calcule $\int_C F$, onde C é a seguinte curva:

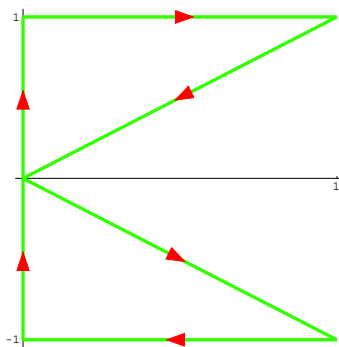



Figura 6.17: Exemplo [4].

Parametrizamos a curva por 5 segmentos de reta:

$\gamma_1^+(t) = (0, 2\,t - 1)$, $\gamma_2^+(t) = (t, 1)$ $\gamma_3^+(t) = (1 - t, 1 - t)$, $\gamma_4^+(t) = (t, -t)$ e $\gamma_5^+(t) = (1 - t, -1)$, $t \in [0, 1]$.

Então:

$$\int_C F = \int_{C_1^+} F + \int_{C_2^+} F + \int_{C_3^+} F + \int_{C_4^+} F + \int_{C_5^+} F,$$

donde obtemos:

$$\int_C F = \int_0^1 0\,dt + \int_0^1 t\,dt - 2\int_0^1 (1-t)^2\,dt - 2\int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 (1-t)\,dt = -\frac{1}{3}.$$

[5] Determine o trabalho realizado pela força $F(x,y) = \big(\frac{1}{x+2}, \frac{1}{y+3}\big)$ para deslocar uma partícula ao longo da trajetória C dada por:

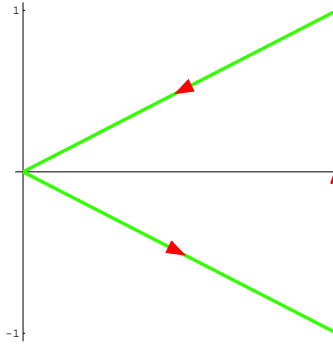



Figura 6.18: Exemplo [5].

Devemos calcular: $\int_C F = \int_{C_1^+} F + \int_{C_2^+} F + \int_{C_3^+}$. C_1 é o segmento de reta ligando $(0,0)$ e $(1,-1)$ e é parametrizado por $x(t) = t$ e $y(t) = -t$, $t \in [0,1]$; logo, $dx = dt$ e $dy = -dt$. Então:

$$\int_{C_1^+} F = \int_0^1 \left[\frac{1}{t+2} - \frac{1}{3-t}\right] dt = 0.$$

C_2 é o segmento de reta ligando $(1,-1)$ e $(1,1)$ e é parametrizado por $x(t) = 1$ e $y(t) = 2\,t - 1$, $t \in [0,1]$; logo, $dx = 0$ e $dy = 2\,dt$. Então:

$$\int_{C_2^+} F = \int_0^1 \frac{dt}{t+1} = ln(2).$$

C_3 é o segmento de reta ligando $(1,1)$ e $(0,0)$; consideremos C_3^- que liga $(0,0)$ e $(1,1)$ e é parametrizado por $x(t) = t$ e $y(t) = t$, $t \in [0,1]$; logo, $dx = dt$ e $dy = dt$. Assim:

$$\int_{C_3} F = -\int_{C_3^-} F = -\int_0^1 \left[\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+3}\right] dt = -ln(2).$$

Então: $\displaystyle\int_C F = ln(2) - ln(2) = 0.$

[6] Seja $F(x,y,z) = (x^2+y, -y\,z, x\,z^2)$. Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde C e formada pelos segmentos de retas C_1, C_2 e C_3 que ligam os pontos $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$; $(1,0,0)$ a $(1,1,0)$ e $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$, respectivamente.

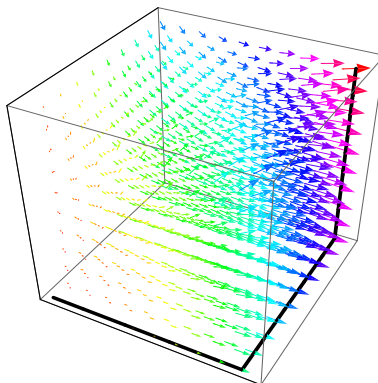



Figura 6.19: Exemplo [6].

Parametrizamos a curva $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ por $\gamma,\ \beta,\ \eta\,:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\gamma(t) = (t,0,0)$, $\beta(t) = (1,t,0)$ e $\eta(t) = (1,1,t)$. Por outro lado $\gamma'(t) = (1,0,0)$, $\beta'(t) = (0,1,0)$ e $\eta'(t) = (0,0,1)$; $F(\gamma(t)) = (t^2,0,0)$, $F(\beta(t)) = (1+t,0,0)$ e $F(\eta(t)) = (2,-t,t^2)$; então:

$$\int_C F = 2\int_0^1 t^2\,dt = \frac{2}{3}.$$

[7] Calcule $\displaystyle\int_C F$, onde $F(x,y,z) = (x,y,z)$ e C é a curva obtida pela interseção das superfícies $x^2+y^2-2\,y = 0$ e $z = y$.

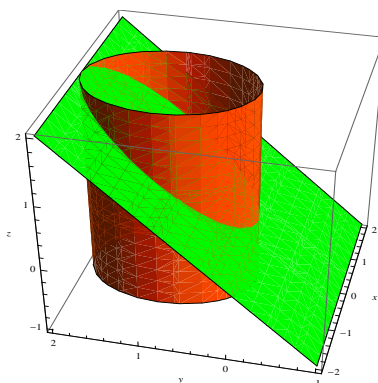



Figura 6.20: Exemplo [7].

A superfície definida por $x^2+y^2-2\,y=0$ é um cilindro circular reto de raio igual a 1; de fato, $x^2+y^2-2\,y=x^2+(y-1)^2-1$ e $z-y=0$ é um plano passando pela origem. A interseção é a solução do sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2\,y=0\\ y=z, \end{cases}$$

donde obtemos a curva fechada $x^2+(z-1)^2=1$. O campo F é conservativo, com potencial $f(x,y,z)=\dfrac{1}{2}\,(x^2+y^2+z^2)$; logo:

$$\oint_C F=0.$$

6.5 Aplicação

Seja F um campo de vetores contínuo que representa a força que move uma partícula ao longo de uma curva C de classe C^2, parametrizada por $\gamma=\gamma(t)$, $t\in[a,b]$ e tal que $\gamma(a)=A$ e $\gamma(b)=B$. Pela segunda lei de Newton, a força F agindo ao longo de C é dada por:

$$F(\gamma(t))=m\,\gamma''(t),$$

onde m é a massa da partícula; logo o trabalho realizado pela partícula é:

$$W=\int_C F=\int_a^b m\,\gamma''(t)\cdot\gamma'(t)\,dt=\frac{m}{2}\int_a^b\frac{d}{dt}\big(\gamma'(t)\cdot\gamma'(t)\big)\,dt=\frac{m}{2}\int_a^b\frac{d}{dt}\,\|\gamma'(t)\|^2\,dt,$$

aplicando o teorema fundamental do cálculo:

$$W=\frac{m}{2}\,\big(\|\gamma'(b)\|^2-\|\gamma'(a)\|^2\big).$$

A energia cinética de uma partícula Q de massa m é dada por:

$$K(Q)=\frac{m}{2}\,\|v'(t)\|^2,$$

onde $v=v(t)$ é a velocidade da partícula; logo,

$$(3)\qquad W=K(B)-K(A).$$

Se F é um campo gradiente, isto é, $F=\nabla f$, para alguma f de classe C^1, a energia potencial de uma partícula Q é $P(Q)=-f(Q)$; logo, $F=-\nabla P$; então:

$$(4)\qquad W=\int_C F=-\int_C\nabla P=-\big(P(B)-P(A)\big).$$

De (3) e (4), temos:

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B).$$

Logo, se uma partícula se move de um ponto A ao ponto B, com um campo de força conservativo, a soma da energia potencial e da cinética permanece constante. Isto é conhecido como **lei da conservação da energía mecânica**.

O resulatado anterior pode ser estendido para sistemas compostos por um número N de partículas como gases, fluidos, etc.

6.6 Exercícios

1. Calcule $\int_C f$, onde:

   (a) $f(x,y) = 2\,x\,y^2$ e C é parametrizada por $\gamma(t) = (cos(t), sen(t))$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ de $A = (2,0)$ a $B = (0,2)$.

   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e C é a reta que liga os pontos $A = (2,0)$ a $B = (0,2)$.

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ e C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$ de $A = (2,0)$ a $B = (-1, \sqrt{3})$.

   (e) $f(x,y,z) = e^z$ e C é parametrizada por $\gamma(t) = (1, 2, t^2)$, no intervalo $[0,1]$.

   (f) $f(x,y,z) = x + y$ e C é a curva obtida pela interseção de $z = x^2 + y^2,\ z \leq 2$ e $x = y,\ 0 \leq y$.

   (g) $f(x,y) = |x| + |y|$ e C é a reta que liga os pontos $A = (-2,0)$ a $B = (2,2)$.

   (h) $f(x,y) = |x| + |y|$ e C é a reta que liga os pontos $A = (2,2)$ a $B = (2,0)$.

2. Calcule $\int_C F$, onde:

   (a) $F(x,y) = (y + 3\,x, 2\,y - x)$ e C é a elipse $4\,x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido anti-horário.

   (b) $F(x,y) = (x\,y, -y)$ e C é formado pela reta que ligando $A = (-3,-3)$ a $B = (-1,1)$ e pelo arco da parábola $y = x^2$ de B a $C = (2,4)$.

   (c) $F(x,y) = (y, -x)$ e C é a astróide.

   (d) $F(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ e C é o círculo centrado na origem, percorrida no sentido anti-horário.

   (e) $F(x,y,z) = (x, y, x\,z - y)$ e C é o segmento de reta ligando $(0,0,0)$ e $(1,2,4)$.

   (f) $F(x,y,z) = (x^2 - y^2, z^2 - x^2, y^2 - z^2)$ e C é a curva obtida pela interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e o plano $y = 1$, percorrida no sentido anti-horário.

3. Calcule $\int_C y\,dx + x^2\,dy$, onde C é a curva parametrizada por:

(a) $\gamma(t) = (cos(t), sen(t))$, $t \in [0, 2\pi]$

(b) O quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$

(c) O quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$

4. Calcule o trabalho realizado pelo campo de força dado:

(a) $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2\,x\,y)$ ao mover uma partícula ao longo da fronteira da região limitada por $[0,a] \times [0,a]$, ($a > 0$).

(b) $F(x,y,z) = (y, x, z^2)$ para deslocar uma partícula ao longo da hélice:

$$\gamma(t) = (2\,cos(t), 2\,sen(t), 2\,t)$$

do ponto $(2,0,0)$ ao ponto $(2,0,4\pi)$.

(c) $F(x,y,z) = (y, z, x)$ para deslocar uma partícula ao longo de $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ do ponto $(0,0,0)$ ao ponto $(2,4,8)$.

(d) $F(x,y) = \dfrac{4\,P(x,y)}{\|P(x,y)\|^3}$, onde P é o vetor posição, para deslocar uma partícula ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, do ponto $(-1,0)$ ao ponto $(1,0)$.

5. Verifique que $\displaystyle\int_C F$ é independente do caminho, achando seu potencial, em caso afirmativo:

(a) $F(x,y) = (3\,x^2\,y, x^3 + 4\,y^3)$

(b) $F(x,y) = (2\,x\,sen(y) + 4\,e^x, cos(y))$

(c) $F(x,y) = (-2\,y^3\,sen(x), 6\,y^2\,cos(x) + 5)$

(d) $F(x,y,z) = (y + z, x + z, x + y)$

(e) $F(x,y,z) = (y\,sec^2(x) - z\,e^x, tg(x), -e^x)$

(f) $F(x,y,z) = (2\,x\,z + y^2, 2\,x\,y + 3\,y^2, e^z + x^2))$

6. Determine as constantes para que as integrais sejam independentes do caminho:

(a) $\displaystyle\int_C (y^2 - x\,y)\,dx + k\,(x^2 - 4\,x\,y)\,dy$.

(b) $\displaystyle\int_C (a\,z^2 - y^2\,sen(x))\,dx + b\,y\,cos(x)\,dy + x\,z\,dz$.

7. Seja $F(x, y) = (x^2\,y, y^2)$ e a curva C formada pela reunião dos segmentos de reta C_1, C_2, C_3 e C_4, como na figura:

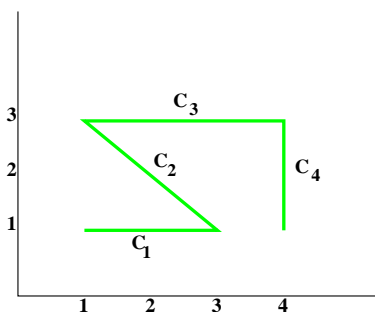



Figura 6.21:

(a) Parametrize a curva.

(b) Calcule $\displaystyle\int_C F$.

Capítulo 7

TEOREMA DE GREEN

Nesta seção apresentaremos uma versão simplificada de um dos teoremas clássicos da Análise Vetorial, o teorema de Green.

Utilizaremos alguns argumentos intuitivos aceitavéis, que formulados rigorosamente fogem dos objetivos destas notas.

Definição 7.1. Uma região fechada e limitada $D \subset \mathbb{R}^2$ é simples se $\partial D = C$ é uma curva fechada simples.

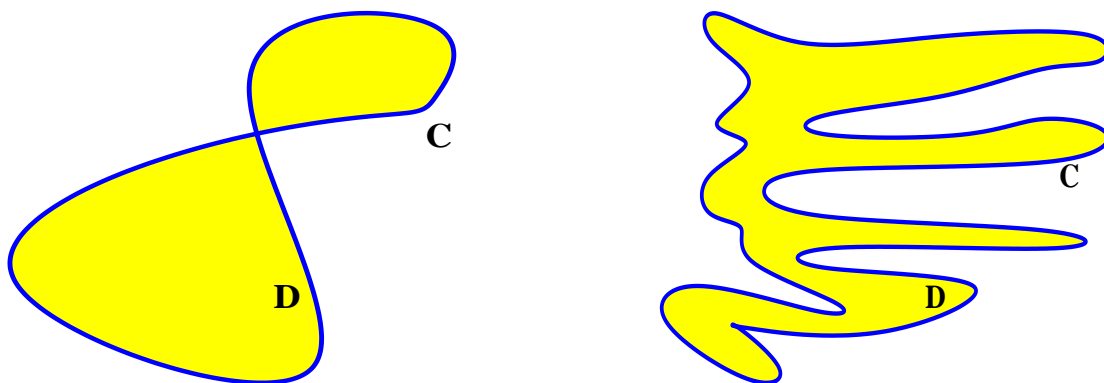



Figura 7.1: A região à esquerda não é simples; a da direita é simples..

Notamos que, em geral, uma região simples pode ser bastante "complicada". A seguir daremos a idéia intuitiva (imprecisa) de como orientar a curva ∂D

Definição 7.2. A curva $C = \partial D$ está orientada positivamente se é percorrida no sentido anti-horário. (D fica à esquerda, ao se percorrer $\partial D = C$).

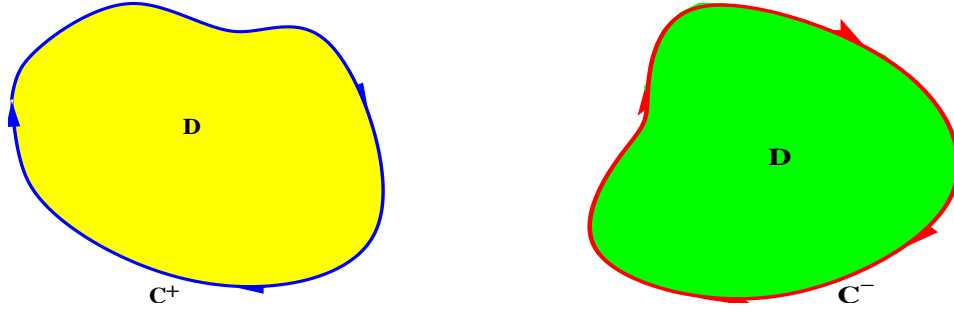



Figura 7.2: Regiões orientadas.

Teorema 7.1. (Green) Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, D uma região simples, $C = \partial D$ orientada positivamente, tal que $D \subset A$ e $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1, com funções coordenadas (F_1, F_2). Se $C = \partial D$ tem uma parametrização de classe C^1 por partes e está orientada positivamente em relação a D, então:

$$\boxed{\oint_{\partial D} F = \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy}$$

Nós provaremos no apêndice o teorema de Green, numa versão particular, para regiões chamadas elementares.

Corolário 7.2. Nas hipóteses do teorema de Green, se F é um campo conservativo, então

$$\boxed{\oint_{\partial D} F = 0}$$

A prova segue diretamente do teorema de Green.

Corolário 7.3. Nas hipóteses do teorema de Green, a área da região D é dada por:

$$\boxed{A(D) = \oint_{\partial D} x\,dy}$$

ou

$$\boxed{ii) A(D) = -\oint_{\partial D} y\,dx}$$

ou

$$\boxed{A(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx}$$

Prova: Basta considerar o campo $F(x,y) = (-y,x)$ e aplicar o teorema de Green para obter:

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x\,dy - y\,dx.$$

Exemplo 7.1.

[1] Utilizando o teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

1. $\displaystyle\oint_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, onde γ é a curva formada pelas retas $x = 1$, $y = 0$ e a parábola $y = x^2$, no sentido anti-horário.

2. $\displaystyle\oint_\gamma y\,dx + x^2\,dy$, onde γ é a curva formada pelas retas $x = 2$, $y = 0$ e $2\,y - x = 0$, no sentido anti-horário.

1. $F_1(x,y) = \sqrt{y}$ e $F_2(x,y) = \sqrt{x}$; logo: $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\,(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{y}})$; então,

$$\oint_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy = \frac{1}{2}\iint_D (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}})\,dx\,dy,$$

onde D é a região de tipo I: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$.

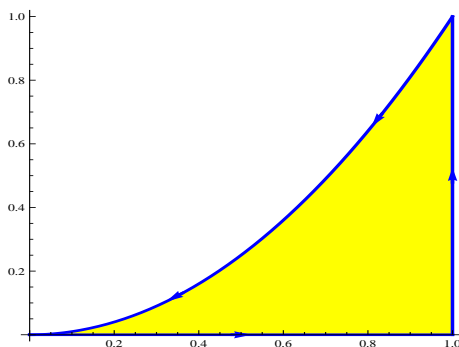



Figura 7.3: Exemplo [1].

$$\frac{1}{2}\iint_D (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}})\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\int_0^{x^2} (\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}})\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \big(x^{\frac{3}{2}} - 2\,x\big)\,dx = -\frac{3}{10}.$$

Logo: $\displaystyle\oint_\gamma \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy = -\frac{3}{10}$.

2. $F_1(x,y) = y$ e $F_2(x,y) = x^2$; logo: $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2\,x - 1$; então,

$$\oint_\gamma y\,dx + x^2\,dy = \iint_D (2\,x-1)\,dx\,dy,$$

onde D é a região de tipo I: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,0\le x\le 2,\;0\le y\le \dfrac{x}{2}\}$.

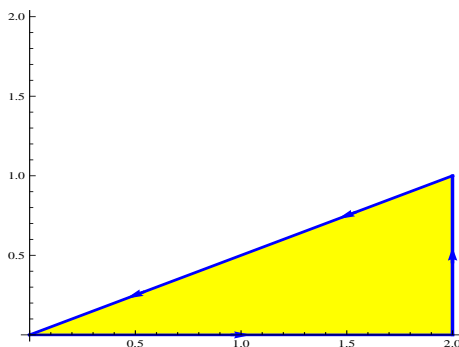



Figura 7.4: Exemplo [2].

Logo,

$$\oint_\gamma y\,dx + x^2\,dy = \iint_D (2\,x-1)\,dx\,dy = \int_0^2 \Big(\int_0^{\frac{x}{2}} (2\,x-1)\,dy\Big)\,dx = \int_0^2 (x^2-\frac{x}{2})\,dx = \frac{5}{3}.$$

[2] Calcule $\displaystyle\int_\gamma e^x\,sen(y)\,dx + (e^x\,cos(y)+x)\,dy$, onde γ é o círculo de raio 1 centrado na origem, no primeiro e segundo quadrantes.

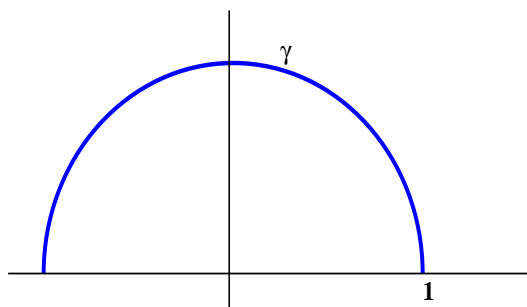



Figura 7.5: Exemplo [2]

O teorema de Green não pode ser aplicado, pois a curva não é fronteira de uma região fechada. Para poder aplicar o teorema de Green, consideramos a curva $\beta=\gamma\cup\gamma_1$, diferenciável por partes, orientada no sentido anti-hórario, como no seguinte desenho:

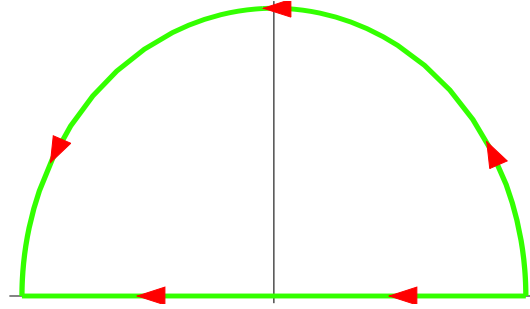



Figura 7.6:

A região D é tal que $\partial D = \beta$. Aplicamos o teorema de Green considerando a curva β.

Sejam $F_1(x,y) = e^x\,sen(y)$ e $F_2(x,y) = e^x\,cos(y) + x$; logo, $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 1$; então:

$$\oint_\beta e^x\,sen(y)\,dx + (e^x\,cos(y) + x)\,dy = \iint_D dx\,dy = A(D),$$

onde $A(D) = \dfrac{\pi}{2}$ é a área do semi-círculo de raio 1. Por outro lado:

$$\oint_\beta F = \int_\gamma F + \int_{\gamma_1} F;$$

logo,

$$\int_\gamma F = \frac{\pi}{2} - \int_{\gamma_1} F.$$

Só falta calcular $\displaystyle\int_{\gamma_1} e^x\,sen(y)\,dx + (e^x\,cos(y) + x)\,dy$, onde γ_1 é o segmento de reta entre os pontos $(-1,0)$ e $(1,0)$. Uma parametrização de γ_1 é:

$$\begin{cases} x(t) = 2\,t - 1 & \qquad dx = 2\,dt \\ y(t) = 0,\ t \in [0,1], & \qquad dy = 0\,dt. \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} e^x\,sen(y)\,dx + (e^x\,cos(y) + x)\,dy = \int_0^1 (2\,t - 1 + e^{2t-1})\,0\,dt = 0.$$

Então: $\displaystyle\int_\gamma e^x\,sen(y)\,dx + (e^x\,cos(y) + x)\,dy = \frac{\pi}{2}.$

[3] Calcule $\displaystyle\int_C (y\,e^{x\,y} + 2\,x\,y\,cos(x^2\,y))\,dx + (x\,e^{x\,y} + x^2\,cos(x^2\,y))\,dy$, onde C é a curva formada pelos arcos das seguintes curvas $y = x^3 - x$ e $y = x - x^3$, $-1 \le x \le 1$.

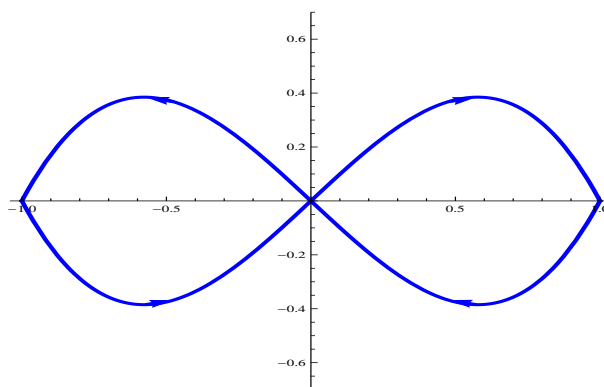



Figura 7.7: Exemplo [3].

C é uma curva fechada e $F(x,y) = (y\,e^{x\,y} + 2\,x\,y\,cos(x^2\,y), x\,e^{x\,y} + x^2\,cos(x^2\,y))$ é um campo conservativo, com potencial $f(x,y) = e^{x\,y} + sen(x^2\,y) + c$; logo:

$$\oint_C (y\,e^{x\,y} + 2\,x\,y\,cos(x^2\,y))\,dx + (x\,e^{x\,y} + x^2\,cos(x^2\,y))\,dy = 0.$$

[4] Determine a área da região limitada pelas curvas $4\,x^2 + y^2 = 4$ e $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Pela simetria da região, calculamos a área da região no primeiro quadrante e multiplicamos o resultado por 4.

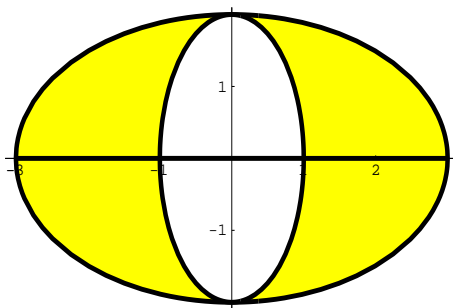



Figura 7.8:

A nova região é uma região fechada simples D tal que $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, onde γ_1 é o arco da elipse $4\,x^2 + y^2 = 4$, γ_2 é o segmento de reta que liga os pontos $(1,0)$ e $(3,0)$ e γ_3 é o arco da elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

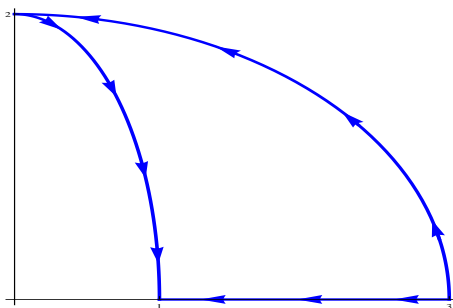



Figura 7.9:

$$A(D) = \oint_{\partial D} x\,dy = \int_{\gamma_1} x\,dy + \int_{\gamma_2} x\,dy + \int_{\gamma_3} x\,dy.$$

Parametrizações:

i) $4\,x^2 + y^2 = 4$ é parametrizada por $\gamma_1^-(t) = (cos(t), 2\,sen(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

ii) O segmento de reta que liga os pontos $(1,0)$ e $(3,0)$ é parametrizado por $\gamma_2(t) = (t,0)$, $t \in [1,3]$.

iii) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ é parametrizada por $\gamma_3^-(t) = (3\,cos(\frac{\pi}{2} - t), 2\,sen(\frac{\pi}{2} - t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Então:

i) $\displaystyle\int_{\gamma_1} x\,dy = \int_{\gamma_1^-} x\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,cos^2(t)\,dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos(2\,t) + 1)\,dt = -\frac{\pi}{2}$

ii) $\displaystyle\int_{\gamma_2} x\,dy = 0.$

iii) $\displaystyle\int_{\gamma_3} x\,dy = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} -6\,sen^2(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 3\,cos(2\,t))\,dt = \frac{3\,\pi}{2}.$

Logo, a área total é $4\,\pi\,u.a.$

7.1 Extensão do Teorema de Green

O teorema de Green ainda é válido para regiões mais gerais de que as estudadas no parágrafo anterior.

Teorema 7.4. Seja D uma região no plano tal que $\partial D = C_1 \cup C_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots \cup C_n$. Cada curva da fronteira de D é orientada de forma que D tenha orientação positiva. Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto tal que $D \subset U$ e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1, com funções coordenadas (F_1, F_2). Então:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i^+} F = \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\, dy.}$$

A seguinte região é tal que $\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^- \cup C_3^- \cup C_4^-$

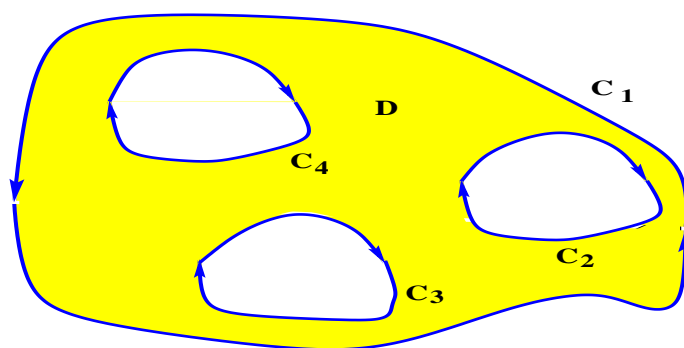



Figura 7.10:

Por exemplo consideremos a seguinte região D:

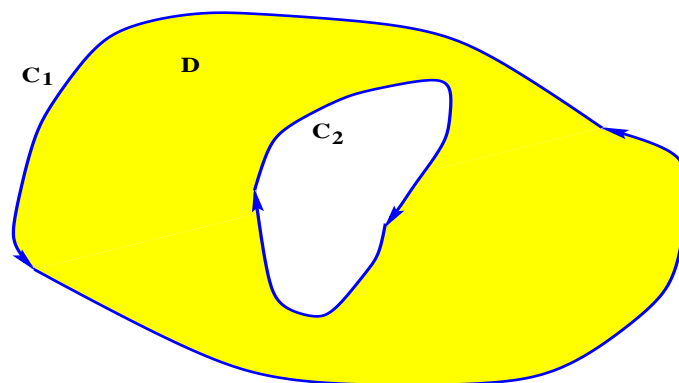



Figura 7.11:

$\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^-$. Subdividamos a região D em 4 subregiões $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$:

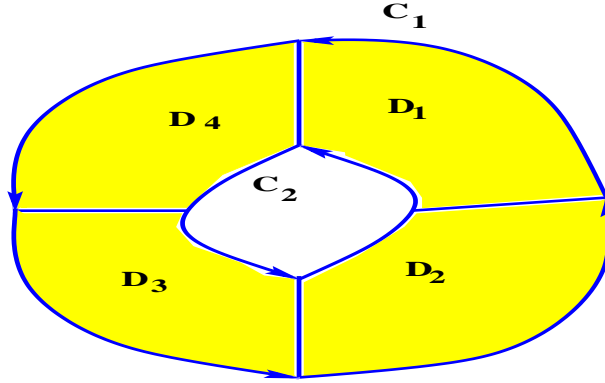



Figura 7.12:

i) Seja D_1 tal que $\partial D_1^+ = C_{11}^+ \cup L_4^+ \cup C_{21}^- \cup L_1^+$; onde C_{i1} é o arco da curva C_i, $(1 \leq i \leq 2)$ na região D_1.

ii) Seja D_2 tal que $\partial D_2^+ = C_{12}^+ \cup L_2^+ \cup C_{22}^- \cup L_1^-$; onde C_{i1} é o arco da curva C_i, $(1 \leq i \leq 2)$ na região D_2.

iii) Seja D_3 tal que $\partial D_3^+ = C_{13}^+ \cup L_2^- \cup C_{23}^- \cup L_3^+$; onde C_{i1} é o arco da curva C_i, $(1 \leq i \leq 2)$ na região D_3.

iv) Seja D_4 tal que $\partial D_4^+ = C_{14}^+ \cup L_3^- \cup C_{24}^- \cup L_4^-$; onde C_{i1} é o arco da curva C_i, $(1 \leq i \leq 2)$ na região D_4.

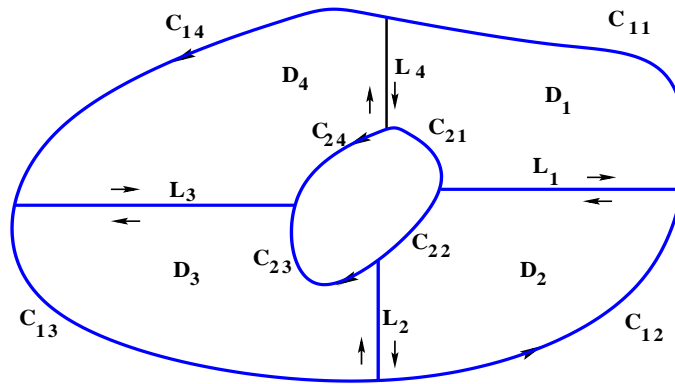



Figura 7.13:

i) Aplicando o teorema de Green em D_1:

$$\iint_{D_1} \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy = \oint_{\partial D_1^+} F = \int_{C_{11}^+} F + \int_{L_4^+} F + \int_{C_{21}^-} F + \int_{L_1^+} F.$$

ii) Aplicando o teorema de Green em D_2:

$$\iint_{D_2}\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]dx\,dy=\oint_{\partial D_2^+}F=\int_{C_{12}^+}F+\int_{L_2^+}F+\int_{C_{22}^-}F+\int_{L_1^-}F.$$

iii) Aplicando o teorema de Green em D_3:

$$\iint_{D_3}\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]dx\,dy=\oint_{\partial D_3^+}F=\int_{C_{13}^+}F+\int_{L_2^-}F+\int_{C_{23}^-}F+\int_{L_3^+}F.$$

iv) Aplicando o teorema de Green em D_4:

$$\iint_{D_4}\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]dx\,dy=\oint_{\partial D_4^+}F=\int_{C_{14}^+}F+\int_{L_3^-}F+\int_{C_{24}^-}F+\int_{L_4^-}F.$$

Então, de i), ii), iii) e iv):

$$\boxed{\sum_{i=1}^{4}\iint_{D_i}\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]dx\,dy=\int_{C_1^+}F+\int_{C_2^-}F.}$$

Exemplo 7.2.

[1] Seja D a região limitada pela curva $x^2+y^2=9$ externa ao retângulo de vértices $(1,-1)$, $(2,-1)$, $(2,1)$ e $(1,1)$, orientada positivamente. Calcule

$$\int_{\partial D^+}(2\,x-y^3)\,dx-x\,y\,dy.$$

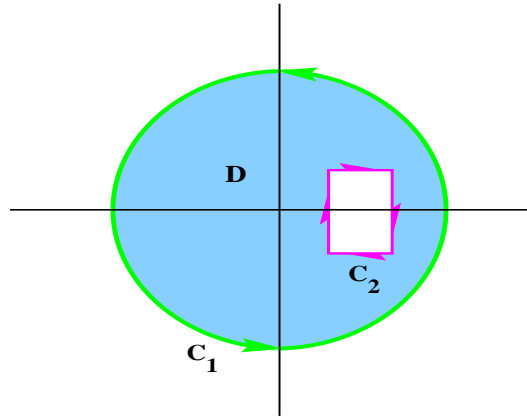



Figura 7.14: Exemplo [1].

$\partial D^+=C_1^+\cup C_2^-$; então:

$$\int_{\partial D^+}(2\,x-y^3)\,dx-x\,y\,dy=\int_{\partial C_1^+}(2\,x-y^3)\,dx-x\,y\,dy-\int_{\partial C_2^+}(2\,x-y^3)\,dx-x\,y\,dy.$$

i) Seja D_1 a região limitada pela curva $x^2+y^2=9$; $\partial D_1^+ = C_1^+$. Seja $F_1(x,y)=2\,x-y^3$ e $F_2(x,y)=-x\,y$. Aplicando o teorema de Green a D_1, utilizando a parametrização usual do círculo:

$$\begin{aligned}\int_{\partial C_1^+} (2\,x-y^3)\,dx - x\,y\,dy &= \iint_{D_1} (3\,y^2-y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^3 (3\,r^2\,sen^2(t) - r\,sen(t))\,r\,dr\Big)\,dt = \frac{243\,\pi}{4}.\end{aligned}$$

ii) Seja D_2 a região limitada pelo retângulo; $\partial D_2^+ = C_2^+$. Seja $F_1(x,y)=2\,x-y^3$ e $F_2(x,y)=-x\,y$. Aplicando o teorema de Green a D_2:

$$\int_{\partial C_2^+} (2\,x-y^3)\,dx - x\,y\,dy = \iint_{D_2} (3\,y^2-y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \Big(\int_1^2 (3\,y^2-y)\,dx\Big)\,dy = 2.$$

De i) e ii):

$$\int_{\partial D^+} (2\,x-y^3)\,dx - x\,y\,dy = \frac{243\,\pi}{4} - 2.$$

[2] Calcule $\oint_C F$, onde $F(x,y) = \Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} + 2\,x\Big)$ e C é a curva $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ no sentido anti-hórario.

Não podemos aplicar o teorema de Green, pois F não é definido na origem. Seja D a região limitada pela curva $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, externa ao círculo de raio 1, centrado na origem:

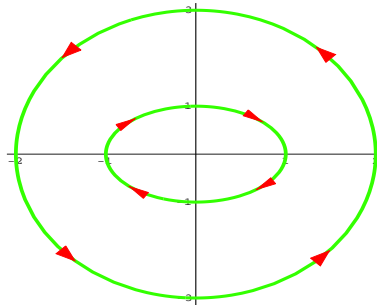



Figura 7.15: Exemplo [2].

$\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^-$. Sejam $F_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ e $F_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + 2\,x$; então, aplicando o teorema anterior:

$$\int_{C_1^+} F + \int_{C_2^-} F = \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\,dy = \iint_D 2\,dx\,dy = 2\,A(D) = 10\,\pi.$$

Logo:

$$\int_{C_1^+} F = 10\,\pi - \int_{C_2^-} F = 10\,\pi + \int_{C_2^+} F.$$

Usando a parametrização usual do círculo:

$$\int_{C_2^+} F = \int_0^{2\pi} (sen^2(t) + 3\,cos^2(t))\,dt = \int_0^{2\pi} (1 + 2\,cos^2(t))\,dt = 4\,\pi;$$

então: $\displaystyle\int_{C_1^+} F = (10+4)\,\pi = 14\,\pi.$

7.2 Caracterização dos Campos Conservativos no Plano

Definição 7.3. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto.

1. A é dito um domínio poligonal se para todo $x,\, y \in A$ existe uma poligonal ligando x e y em A.

2. A é dito simplesmente conexo se, para toda curva fechada $C \subset A$, a região limitada por C está contida em A.

Intuitivamente, A é simplesmente conexo quando não tem "buracos". A seguinte região D tal que $\partial D = C_1 \cup C_2$, não é simplesmente conexa.

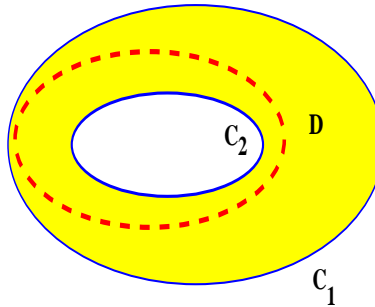



Figura 7.16: .

Teorema 7.5. Seja F um campo de vetores de classe C^1, definido num domínio poligonal, simplesmente conexo, aberto A. São equivalentes as seguintes afirmações:

1. $\displaystyle\oint_C F = 0$, onde $C \subset A$ é uma curva fechada de classe C^1 por partes, arbitrária.

2. A integral de linha de F do ponto P_1 até o ponto P_2, denotada por: $\displaystyle\int_{P_1}^{P_2} F$, é independente das curvas de classe C^1 por partes que ligam P_1 e P_2.

3. F é conservativo.

4. $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)$, para todo $(x, y) \in A$.

Prova: (1) $\Rightarrow$ (2). Sejam C_1 e C_2 duas curvas ligando P_1 e P_2 em A.

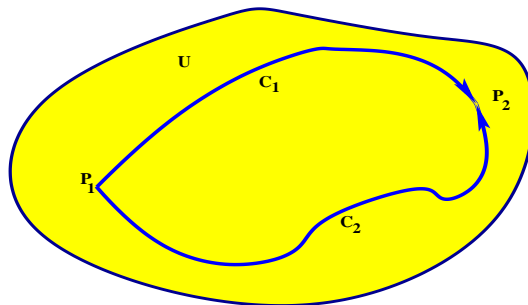



Figura 7.17:

Seja C tal que $C^+ = C_1^- \cup C_2^+$; então:

$$0 = \oint_C F = \int_{C_1^-} F + \int_{C_2^+} F;$$

logo, $\displaystyle\int_{C_1^+} F = \int_{C_2^+} F$, quaisquer que sejam as curvas C_1 e C_2 ligando P_1 e P_2 em A.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sejam (x_0, y_0) e $(x, y) \in A$. Definamos a função f em A, do seguinte modo:

Consideremos o caminho poligonal ligando (x_0, y_0) e (x, y):

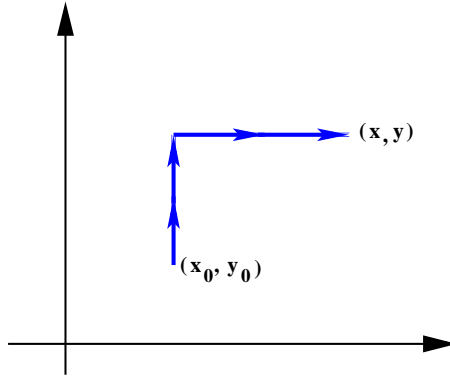



Figura 7.18:

Parametrizando estos caminhos: $\gamma_1(t) = (x_0, t)$, $y_0 \le t \le y$ e $\gamma_2(t) = (t, y_0)$, $x_0 \le t \le x$; definamos f por:

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y)\,dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x,t)\,dt.$$

Esta função é bem definida, pois independe da curva que liga os pontos (x_0, y_0) e $(x, y) \in A$. E segue diretamente da definição que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y).$$

(3) $\Rightarrow$ (4). Como $\nabla f(x,y) = F(x,y)$, segue que:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y),$$

para todo $(x,y) \in A$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Segue do teorema de Green. De fato, podemos aplicar o teorema de Green pois se A é simplesmente conexo, a região D limitada por qualquer curva fechada C está contida em A.

Exemplo 7.3.

[1] Calcule $\oint_C F$, onde $F(x,y) = \big(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\big)$ se:

i) C é qualquer curva fechada simples, bordo de uma região que não contem a origem.

ii) C é qualquer curva fechada simples, bordo de uma região que contem a origem.

i) Seja C^+ como no desenho:

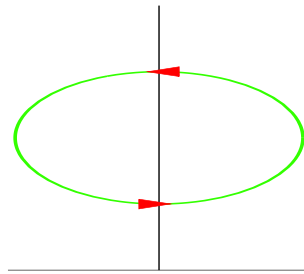



Figura 7.19:

F é um campo conservativo em D tal que $\partial D = C$. Pelo Teorema de Green $\oint_{C^+} F = 0.$

ii) Seja D uma região que contem a origem tal que $\partial D = C$ e C_1 um círculo ao redor da origem (de raio suficientemente pequeno), como no desenho:

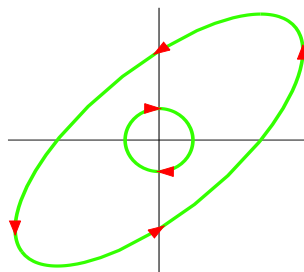



Figura 7.20:

Denotemos por D_1 a região obtida de D tal que $\partial D_1 = C_1^- \cup C^+$. Pelo Teorema de Green:

$$\oint_{\partial D_1^+} F = 0.$$

Denotemos por D_2 a região obtida de D tal que $\partial D_2 = C_1^+$; calculando diretamente,

$$\oint_{\partial D_2^+} F = \oint_{C_1^+} F = 2\,\pi.$$

Como $D = D_1 \cup D_2$, temos:

$$\oint_{C} F = 2\,\pi.$$

[2] Calcule $\int_C F$, onde $F(x,y) = (3\,x^2\,y + 2\,y^2, x^3 + 4\,x\,y + 1)$ e a curva C é parametrizada por $\gamma(t) = (cos^3(t), sen^3(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

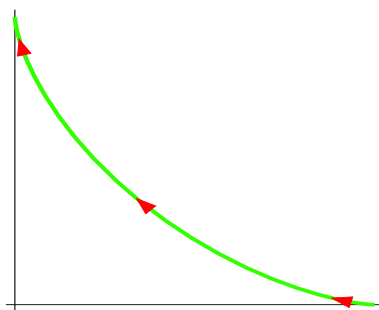



Figura 7.21:

Note que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 3\,x^2 + 4\,y$. Logo, F é conservativo com potencial:

$$f(x,y) = \int (3\,x^2\,y + 2\,y^2)\,dx + \int \,dy = x^3\,y + 2\,y^2\,x + y;$$

então, a integral depende apenas dos pontos inicial e final da curva: $\gamma(0) = (1,0)$ e $\gamma(\dfrac{\pi}{2}) = (0,1)$

$$\int_C F = f(0,1) - f(1,0) = 1 - 0 = 1.$$

[3] Seja $F = (F_1, F_2)$ um campo de vetores tal que $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$. Considere a região dada pelo seguinte desenho, de modo que F não seja definido nas regiões A e B.

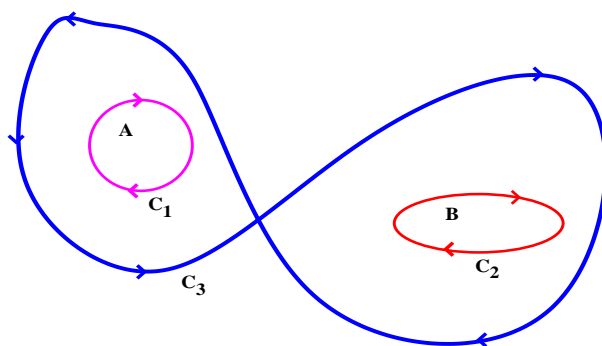



Figura 7.22:

Se $\displaystyle\int_{C_1} F = 12$ e $\displaystyle\int_{C_2} F = 15$, calcule $\displaystyle\int_{C_3} F$.

Separemos a região delimitada pelas curvas do seguinte modo:

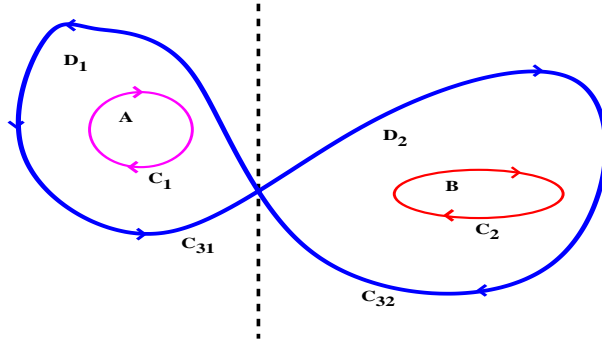



Figura 7.23:

i) Seja D_1 tal que $\partial D_1^+ = C_{31}^+ \cup C_1^-$, então $\displaystyle\int_{\partial D_1^+} F = \int_{C_{31}^+} F - \int_{C_1^+} F$. Aplicando o teorema de Green:

$$\int_{\partial D_1^+} F = \iint_{D_1} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = 0, \text{ logo } \int_{C_{31}^+} F = \int_{C_1^+} F = 12.$$

ii) Seja D_2 tal que $\partial D_2^+ = C_{32}^+ \cup C_2^-$, então $\displaystyle\int_{\partial D_2^+} F = \int_{C_{32}^+} F - \int_{C_2^+} F$. Aplicando o teorema de Green:

$$\int_{\partial D_2^+} F = \iint_{D_2} \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = 0, \text{ logo } \int_{C_{32}^+} F = \int_{C_2^+} F = 15.$$

iii) Como $C_3^+ = C_{31}^+ \cup C_{32}^-$, temos:

$$\int_{C_3^+} F = \int_{C_{31}^+} F - \int_{C_{32}^+} F = 12 - 15 = -3.$$

7.3 Exercícios

1. Calcule $\oint_C 4\,y\,dx + 7\,x\,dy$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(2,2)$, no sentido anti-horário:

   (a) diretamante.

   (b) utilizando o teorema de Green.

2. Calcule as seguintes integrais utilizando o teorema de Green:

   (a) $\oint_C \frac{e^y}{x}\,dx + (e^y\,ln(x) + 2\,x)\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.

   (b) $\oint_C (cos(x) - 5\,y)\,dx + (4\,x - y^{-1})\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $y + x^2 - 9 = 0$ e $y - 5 = 0$.

   (c) $\oint_C (x - y)\,dx - x^2\,dy$, onde C é a fronteira da região $[0,2] \times [0,2]$.

   (d) $\oint_C (e^x - 3\,y)\,dx + (e^y + 6\,x)\,dy$, onde C é a elipse $x^2 + 4\,y^2 = 4$.

   (e) $\oint_C (x + y)\,dx + (y - x)\,dy$, onde C é o círculo $x^2 + y^2 - 2\,a\,x = 0$.

   (f) $\oint_C (x + y)\,dx + (y + x^2)\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

   (g) $\oint_C arctg(x)\,dx + 3\,x\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada pelo retângulo de vértices $(1,0)$, $(2,3)$, $(0,1)$ e $(3,2)$.

   (h) $\oint_C x\,y\,dx + (y + x)\,dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x^2 + y^2 = 1$.

   (i) $\oint_C (y + ln(\sqrt{x} + x^2))\,dx + (x^2 + tg(y^3))\,dy$, onde C é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

3. Utilizando os corolários do teorema de Green, calcule a área da região limitada pelas seguintes curvas:

   (a) $y = x^2$ e $y^2 = x$

   (b) $y = 4\,x^2$ e $y = 16\,x$

   (c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a,\, b > 0)$

   (d) $y^2 = x^3$ e $y = x$

4. Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região nas hipóteses do teorema de Green. Utilizando o teorema, verifique que as coordenadas do centróide de D são dadas por:

$$\overline{x} = \frac{1}{2\,A} \oint_C x^2\, dy \qquad\qquad \overline{y} = -\frac{1}{2\,A} \oint_C y^2\, dx,$$

   onde $A = A(D)$.

   (a) Ache o centróide do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

   (b) Ache o centróide da região definida por $x^2 + y^2 \leq 1$ tal que $y \geq 0$.

5. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$, nos seguintes casos:

   (a) A origem das coordenadas está fora da curva fechada C.

   (b) A curva fechada C encerra a origem das coordenadas.

6. Seja $I = \displaystyle\int_C x^3\, dy - y^3\, dx$, onde C é formada pelos lados do triângulo de vértices $(-2,0)$, $(4,\sqrt{3})$ e $(1,\sqrt{3})$ e seja $J = \displaystyle\iint_R \big(x^2 + y^2\big)\, dx\, dy$, onde R é a região limitada por C. Verifique que $I = 3\,J$.

7. Calcule m de modo que:

$$\int_C \frac{x\, r^m}{y}\, dx - \frac{x^2\, r^m}{y^2}\, dy$$

   com $x^2 + y^2 = r^2$, independa da curva C, fronteira de uma região simplesmente conexa. Escolha uma curva C nas condições do problema e calcule a integral ao longo de C.

8. Verifique que $\oint_C y^2\,dx + (2\,x\,y - 3)\,dy = 0$, sendo C a elipse $x^2 + 4\,y^2 = 4$. Calcule a integral ao longo do arco dessa elipse, situado no primeiro quadrante.

9. Calcule $\int_C \big(x^2\,y\,cos(x) - 2\,x\,y\,sen(x) - y^2\,e^x\big)\,dx + \big(x^2\,sen(x) - 2\,y\,e^x\big)\,dy$, onde C é a hipociclóide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

10. Ache a área da região limitada pela hipociclóide do item anterior, utilizando o teorema de Green.

11. Seja C uma curva simples e fechada que limita uma região de área A. Verifique que se $a_1,\, a_2,\, a_3,\, b_1,\, b_2,\, b_3 \in \mathbb{R}$, então:

$$\oint_C (a_1\,x + a_2\,y + a_3)\,dx + (b_1\,x + b_2\,y + b_3)\,dy = (b_1 - a_2)\,A.$$

12. Sob que condições, no item anterior, a integral ao longo de C é zero?

Capítulo 8

SUPERFÍCIES

8.1 Introdução

A maioria dos objetos da natureza são tridimensionais, porém, em muitos casos para estudá -los, sem perda de generalidade, nós desconsideramos uma característica essencial desses objetos: a dimensão.

Por exemplo, uma partícula pode ser representada por um ponto (dimensão zero), um fio de metal por uma curva (dimensão um), uma membrana ou lâmina de metal por uma superfície (dimensão dois) e um avião por um sólido (dimensão tres).

Neste capítulo existem dois tipos de objetos de nosso interesse: os sólidos e as superfícies.

De forma intuitiva podemos dizer que os sólidos são os objetos de dimensão 3 em $\mathbb{R}^3$ ou, equivalentemente, os que possuem volume e as superfícies são objetos de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ ou, equivalentemente, os que possuem área, mas tem espessura irrelevante.

Vários conceitos técnicos que serão vistos mais adiante, tem definições rigorosas que estão fora do contexto destas notas e por isso ficaremos apenas com idéias geométricas.

Do Cálculo de uma variável, conhecemos os sólidos de revolução; por outro lado, do Cálculo em várias variáveis, os planos e as quádricas são exemplos de superfícies.

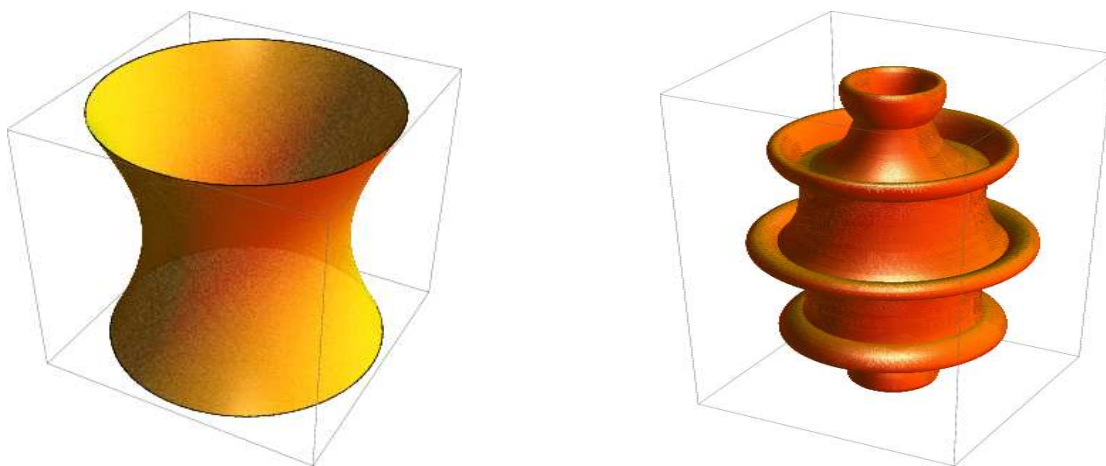



Figura 8.1:

8.2 Superfícies Parametrizadas

Definição 8.1. Uma parametrização de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma função:

$$\Phi : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{tal que} \qquad \Phi(A) = S.$$

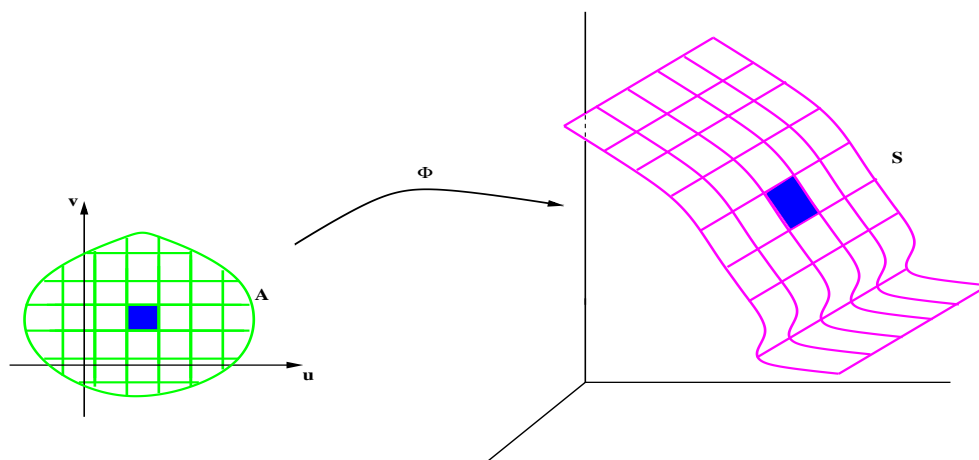



Figura 8.2: Parametrização de uma superfície.

Em tal caso a superfície S é dita parametrizada e denotamos a parametrização de S por:

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

onde $x,\ y,\ z : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de Φ.

Observação 8.1. Intuitivamente, a superfície S é obtida deformando a região A no espaço, através da função Φ. A definição de parametrização é muito geral e permite todo tipo de função, como por exemplo: Φ função constante, ou $\Phi(u,v) = (u,v,g(u,v))$ tal que $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e

$$g(u,v) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad u \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se} \quad u \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ou superfícies com auto-interseções. Mais adiante adicionaremos hipóteses suplementares para evitar estes tipos de situações.

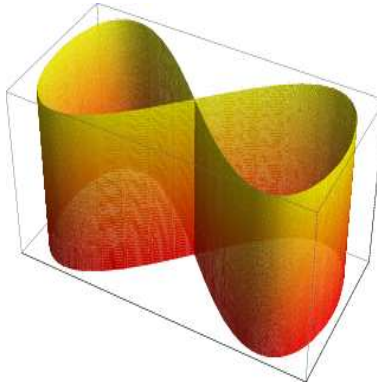



Figura 8.3: Cilindro com auto-interseções.

8.3 Exemplos

A seguir apresentaremos algumas parametrizações das superfícies mais utilizadas:

8.3.1 Superfícies definidas pelo gráfico de uma função

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. O gráfico de f é o seguinte subconjunto do espaço:

$$G(f) = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y) \in A\}.$$

$G(f)$ é, em geral, uma superfície que possui uma parametrização natural.

8.3.2 Parametrização

A cada ponto de $G(f)$ corresponde um ponto em A determinado pela projeção sobre o plano coordenado xy; logo,

$$\boxed{\Phi(x,y) = (x,y,f(x,y))}$$

para todo $(x, y) \in A = Dom(f)$. Então $\Phi(A) = G(f)$.

Exemplo 8.1.

[1] Seja a função $z = f(x, y) = x^2 + y^2$; então $G(f)$ é um parabolóide circular com parametrização $\Psi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ tal que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

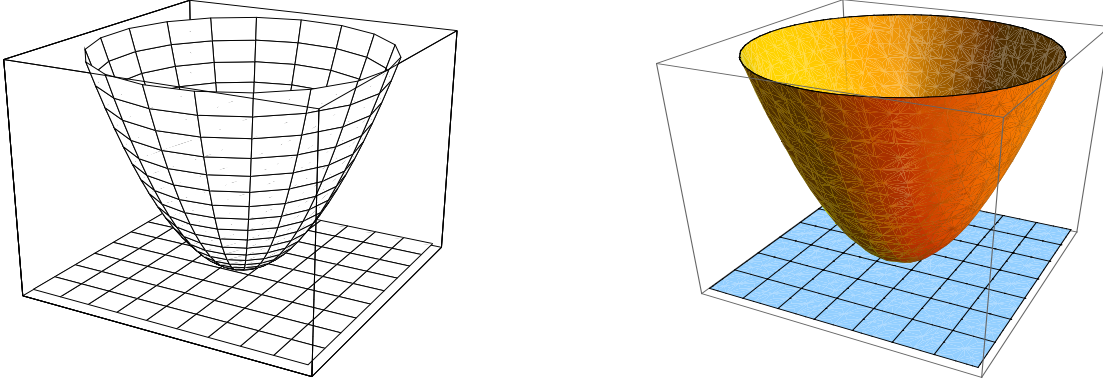



Figura 8.4: Exemplo [1].

[2] Os gráficos das funções $f(x, y) = sen(2\,x)\,sen(2\,y)$, tal que $(x, y) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e $g(x, y) = x^2 - y^2$ tal que $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$, são respectivamente:

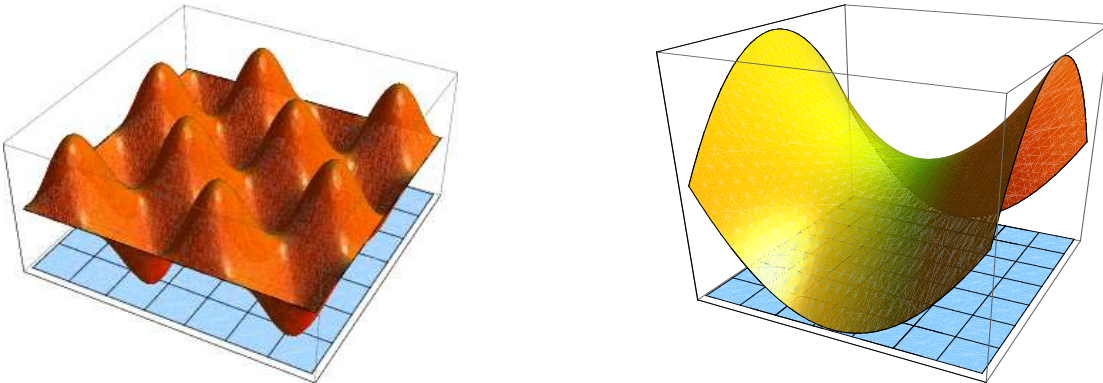



Figura 8.5: Gráficos de f e g, respectivamente.

[3] A esfera unitária em $\mathbb{R}^3$: $S^2 = \{(x, y, z) \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ não é gráfico de uma função de duas variáveis; logo, não podemos definir uma parametrização global de S^2 como gráfico.

Parametrização: Seja $D = \{(x, y) \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$; definimos:

$$\Phi_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2});$$

logo, $\Phi_1(D) = \{(x,y,z)\,/\,x^2+y^2+z^2=1,\ z>0\}$ e $\Phi_1(D) = S^2_+$ é a calota superior da esfera. Também podemos definir:

$$\Phi_2(x,y) = (x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2});$$

logo, $\Phi_2(D) = \{(x,y,z)\,/\,x^2+y^2+z^2=1,\ z<0\}$. $\Phi_2(D) = S^2_-$ é a calota inferior da esfera. Note que $S^2 = S^2_+ \cup S^2_-$.

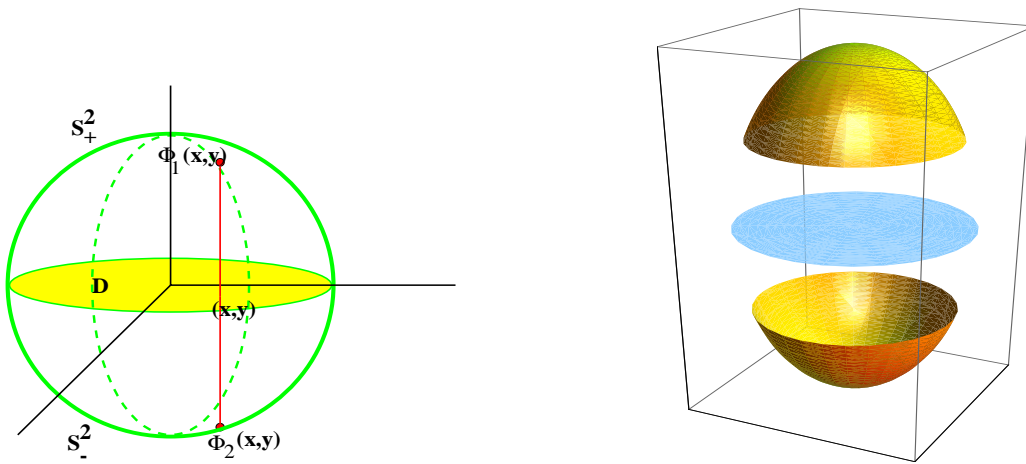



Figura 8.6: Exemplo [3].

8.3.3 Superfícies de Revolução

Seja S a superfície gerada pela rotação da curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ no semi-plano superior $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,/\,y>0\}$, em torno do eixo dos x.

8.3.4 Parametrização

S pode ser parametrizada por:

$$\boxed{\Phi(t,\theta) = (x(t), y(t)\,cos(\theta), y(t)\,sen(\theta))}$$

onde $x,\ y : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, $y(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$ e $\theta \in [0, 2\,\pi)$.

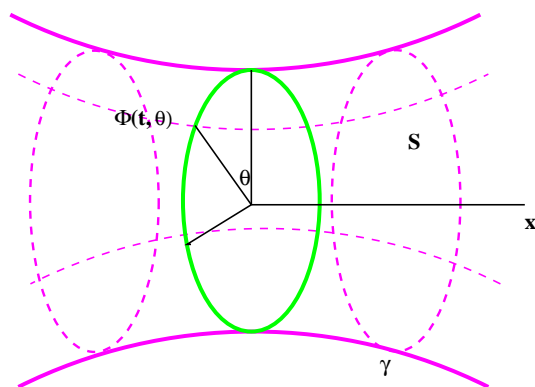



Figura 8.7: Superfície de revolução.

Exemplo 8.2.

[1] Seja a parábola $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [1, 2]$; a superfície de revolução S gerada por γ, girando-a ao redor do eixo dos x é parametrizada por:

$$\Phi(t, \theta) = (t, t^2\, cos(\theta), t^2\, sen(\theta)), \quad (t, \theta) \in [1, 2] \times [0, 2\,\pi).$$

Figura 8.8: Exemplo [1].

[2] Seja a curva $\gamma(t) = (t, 2\,sen(t) + 4))$, $t \in [\frac{\pi}{8}, 2\,\pi]$; a superfície de revolução S gerada por γ girando-a ao redor do eixo dos x é parametrizada por:

$$\Phi(t, \theta) = (t, (2\,sen(t) + 4)\,cos(\theta), (2\,sen(t) + 4)\,sen(\theta)),$$

$(t, \theta) \in [\frac{\pi}{8}, 2\,\pi] \times [0, 2\,\pi)$:

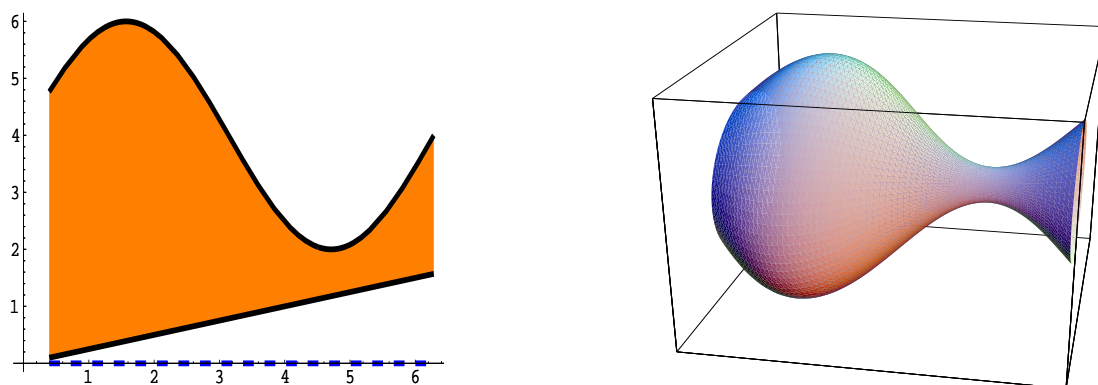



Figura 8.9: Exemplo [2].

8.4 Esferas

A esfera de centro na origem e raio a em $\mathbb{R}^3$ é denotada e definida por:

$$S^2 = \{(x, y, z) \, / \, x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \; a > 0\}.$$

8.4.1 Parametrização

S pode ser parametrizada utilizando coordenadas esféricas.

De fato, seja $A = [0, \pi] \times [0, 2\,\pi]$; definimos:

$$\boxed{\Phi(u, v) = (a\,sen(u)\,cos(v), a\,sen(u)\,sen(v), a\,cos(u)), \quad (u, v) \in A}.$$

Não é difícil ver que a cada ponto da esfera corresponde um único par $(u, v) \in A$, exceto os polo norte $(0, 0, a)$ e sul $(0, 0, -a)$ aos quais correspondem os segmentos $\{0\} \times [0, 2\,\pi]$ e $\{\pi\} \times [0, 2\,\pi]$, respectivamente.

O ângulo u indica a latitude e o ângulo v indica a longitude na esfera. Veja os desenhos.

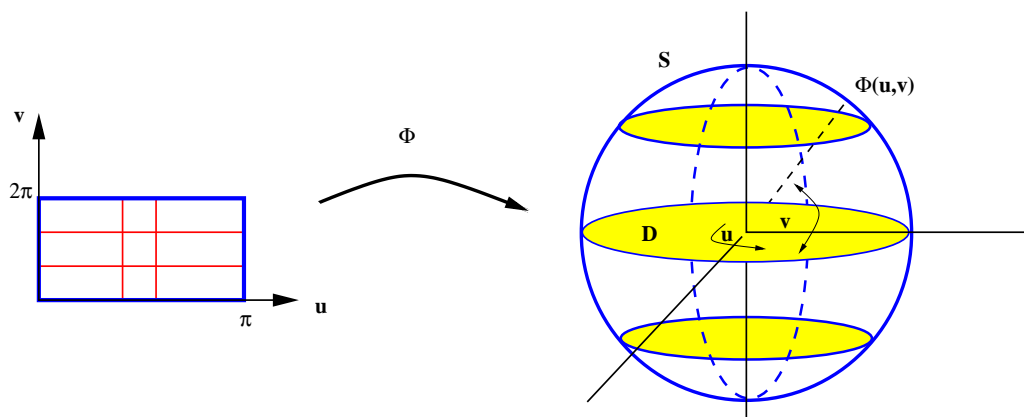



Figura 8.10: Parametrização da esfera.

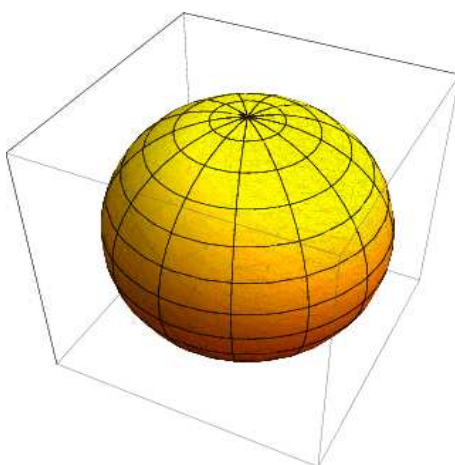



Figura 8.11: A esfera.

A esfera centrada na origem de raio a também pode ser parametrizada por:

$$\Psi(u,v) = (a\,cos(u)\,cos(v), a\,sen(u)\,cos(v), a\,sen(v)),$$

tal que $(u,v) \in [0, 2\,\pi] \times \big[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\big]$.

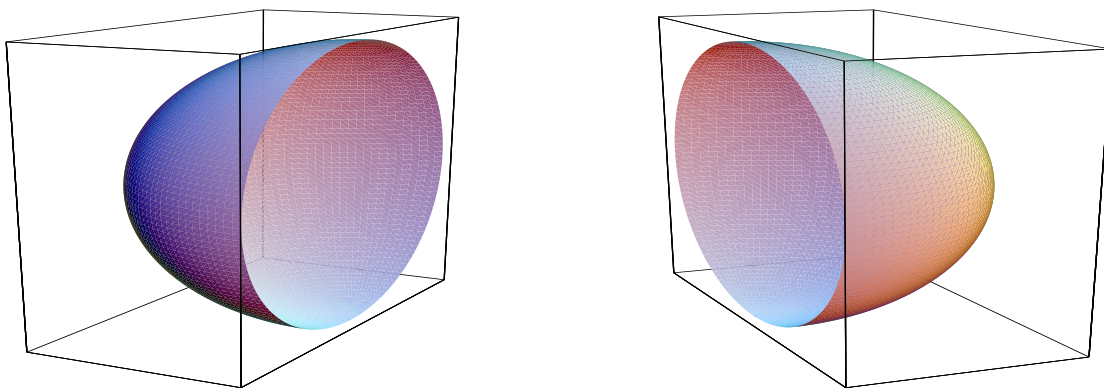



Figura 8.12: Calotas da esfera para $(u, v) \in [\pi, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, respectivamente.

8.5 Cilindros

Seja C uma curva plana e L é uma reta não situada no mesmo plano da curva. O conjunto de todas as retas paralelas a L e que intersectam C é chamado cilindro. A curva C é dita diretriz do cilindro e cada reta que passa por C paralela a L é chamada geratriz do cilindro.

8.5.1 Parametrização

Se a curva C é parametrizada como $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, então parametrizamos o cilindro por:

$$\boxed{\Phi(t, z) = (x(t), y(t), z), \qquad (t, z) \in I \times \mathbb{R}}$$

Exemplo 8.3.

[1] O cilindro de geratrizes paralelas ao eixo dos z e tendo como diretriz uma elipse no plano xy centrada na origem, tem equação cartesiana:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a, b não são nulos.

Parametrizamos a elipse como $\gamma(t) = (a\,cos(t), b\,sen(t))$, $t \in [0, 2\pi]$; logo a parametrização do cilindro é:

$$\Phi(t, z) = (a\,cos(t), b\,sen(t), z), \quad (t, z) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}.$$

No caso da diretriz ser um círculo, o cilindro pode ser parametrizado utilizando coordenadas cilíndricas. Em geral, se na equação que descreve uma quádrica falta uma variável, ela representa um cilindro com geratrizes paralelas à variável que falta.

[2] Se a equação é $y = a\,x^2$, obtemos o cilindro parabólico parametrizado por:

$$\Phi(t, z) = (t, a\,t^2, z), \ \ (t, z) \in I \times \mathbb{R}.$$

[3] Se a equação é $y = a\,sen(x)$, obtemos o cilindro senoidal parametrizado por:

$$\Phi(t, z) = (t, a\,sen(t), z), \ \ (t, z) \in I \times \mathbb{R}.$$

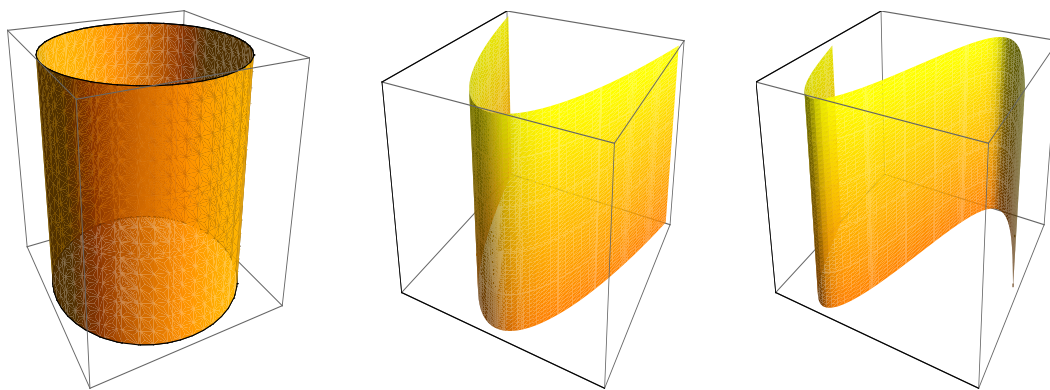



Figura 8.13: Exemplos [1], [2] e [3], respectivamente.

Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto. A superfície S é contínua, diferenciável ou de classe C^k se $\Phi : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é contínua, diferenciável ou de classe C^k; equivalentemente, se cada uma de suas funções coordenadas é contínua, diferenciável ou de classe C^k, respectivamente.

Como notamos através dos exemplos, a parametrização de uma superfície não é única.

Outra forma de definir superfícies é através do Teorema da Função Implícita.

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k; se c é um valor regular de f, então $S = f^{-1}(c)$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$ de classe C^k. Em tal caso S é dita definida implícitamente.

A recíproca desta afirmação é falsa, isto é, se $S = f^{-1}(c)$ é uma superfície, isto não implica necessariamente, que c não seja ponto crítico. (Veja exemplo [2])).

Exemplo 8.4.

A esfera S^2 pode ser definida de forma implícita.

[1] Seja $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; como 1 é valor regular de f, $F^{-1}(1) = S^2$.

[2] Seja $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$; então $S^2 = G^{-1}(0)$; observe que zero é ponto crítico de G.

8.6 Superfícies Regulares

Sejam $\Phi : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ uma superfície parametrizada S, (u_0, v_0) um ponto fixado em A. Definamos as seguinte curvas sobre S:

Definição 8.2. Sejam $\Phi_{u_0}(v) = \Phi(u_0, v)$ e $\Phi_{v_0}(u) = \Phi(u, v_0)$; estas curvas são chamadas curvas coordenadas.

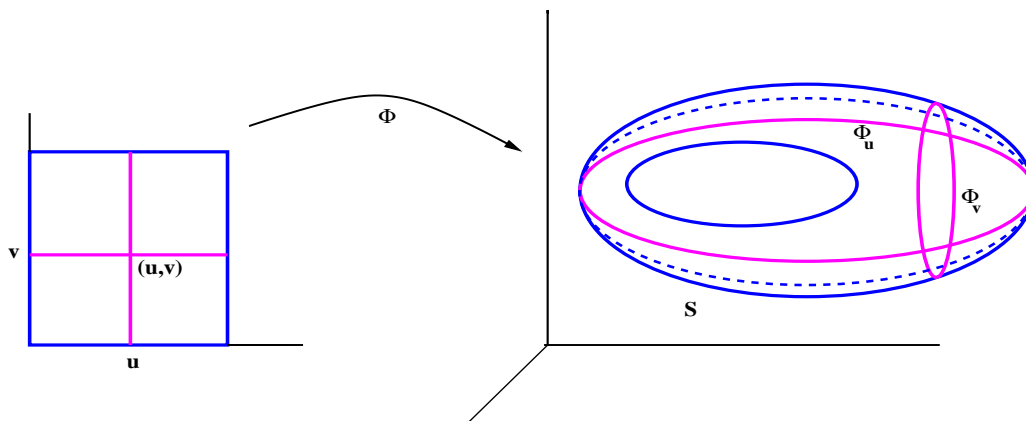



Figura 8.14: Curvas cooedenadas.

Exemplo 8.5.

[1] No caso da superfície ser o gráfico de uma função f, as curvas coordenadas são obtidas pela interseção dos planos paralelos aos planos coordenados yz e xz com $G(f)$; observe que estas curvas não são necessariamente ortogonais

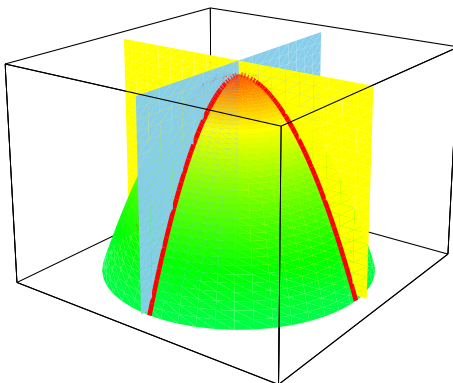



Figura 8.15: Exemplo [1].

[2] No caso da esfera S^2 as curvas coordenadas são dadas pelos paralelos e pelos meridianos da esfera.

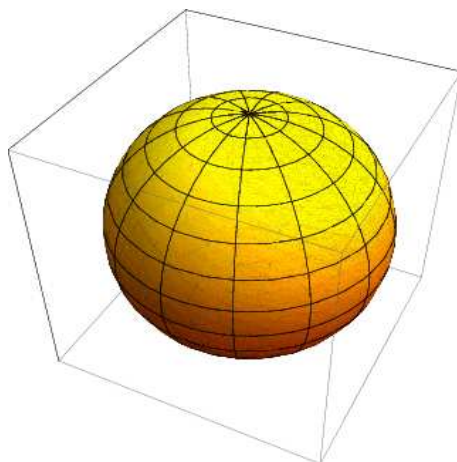



Figura 8.16: Exemplo [2].

[3] No caso de um cilindro circular reto as curvas coordenadas são segmentos de retas paralelas ao eixo dos z e círculos paralelos ao plano xy.

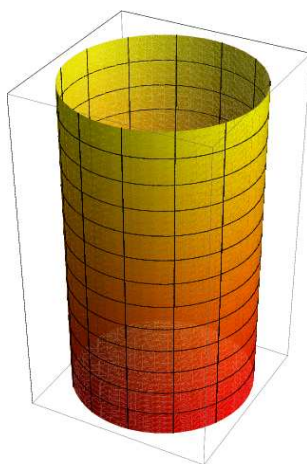



Figura 8.17: Exemplo [3].

[4] Considere a superfície S parametrizada por:

$$\Phi(u,v) = \big((2 + sen(v))\,cos(u), (2 + sen(v))\,sen(u), u + cos(v)\big),$$

onde $(u,v) \in [0, 6\,\pi] \times [0, 2\,\pi]$.

Não é dificil verificar que as curvas coordenadas de S são hélices e circunferências (vefifique este fato). Desenhos da superfície e das curvas coordenadas:

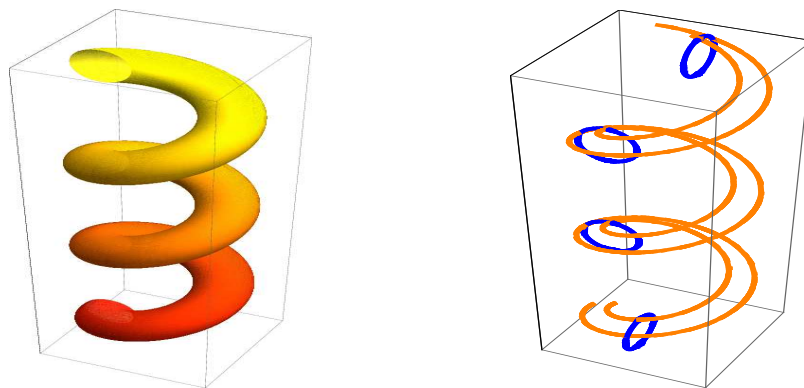



Figura 8.18: Desenhos da superfície e das curvas do exemplo [4].

Se a superfície S tem uma parametrização $\Phi : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferenciável, podemos definir os vetores tangentes a estas curvas no ponto $\Phi(u_0, v_0)$, respectivamente, por:

$$T_{u_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right),$$
$$T_{v_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto (u_0, v_0).

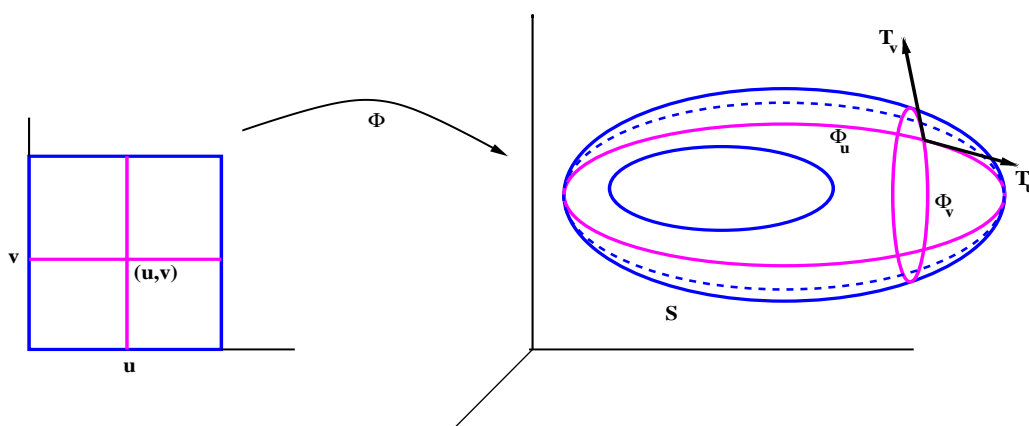



Figura 8.19:

Definição 8.3. A superfície parametrizada S é regular em $\Phi(u_0, v_0)$ se T_{u_0} e T_{v_0} são linearmente independentes.

O plano gerado por T_{u_0} e T_{v_0}, trasladado ao ponto $\Phi(u_0, v_0)$, é chamado plano tangente a S no ponto $\Phi(u_0, v_0)$. Logo, sua equação no ponto $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ é:

$$\boxed{\big(T_{u_0} \times T_{v_0}\big) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.}$$

Equivalentemente, S é regular em $\Phi(u_0, v_0)$ se o vetor normal a S no ponto $\Phi(u_0, v_0)$ é não nulo, isto é, $T_{u_0} \times T_{v_0} \neq \vec{0}$.

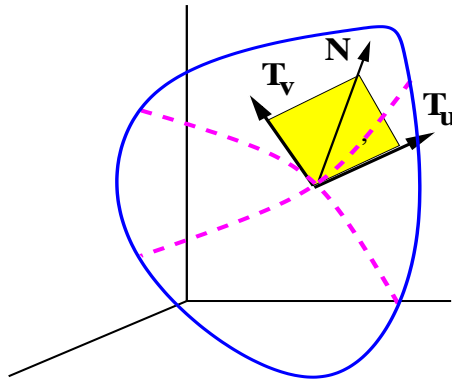



Figura 8.20: Plano tangente

A superfície parametrizada S é regular se $\vec{N} = T_u \times T_v \neq \vec{0}$, para todo $(u, v) \in A$.

Intuitivamente, uma superfície regular pode ser obtida deformando e colando entre si vários pedaços do plano, de modo que resulte uma figura sem arestas, "bicos"ou autointerseções e na qual possamos construir um plano tangente em cada ponto.

Exemplo 8.6.

[1] O cone não é uma superfície regular na origem. De fato, considere o cone parametrizado por $\Phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo:

$$T_x(x, y) = \big(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\big) \quad \text{e} \quad T_y(x, y) = \big(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\big).$$

Claramente $T_x(0, 0)$ e $T_y(0, 0)$ não existem. Logo, o cone não é regular no ponto $(0, 0, 0)$.

[2] Se $G(f)$ é parametrizado por $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ tal que $(x, y) \in Dom(f)$ e f é de classe C^1, então:

$$T_x(x, y) = \big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\big) \quad \text{e} \quad T_y(x, y) = \big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\big);$$

escolhemos o vetor normal:

$$T_x \times T_y = \big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), -1\big).$$

Logo $G(f)$ é uma superfície regular e o plano tangente no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) - z + f(x_0, y_0) = 0.$$

[3] Seja S a superfície de revolução parametrizada por:

$$\Phi(t, \theta) = (x(t), y(t)\,cos(\theta), y(t)\,sen(\theta));$$

então, temos:

$$T_t = (x'(t), y'(t)\,cos(\theta), y'(t)\,sen(\theta)) \quad \text{e} \quad T_\theta = (0, -y(t)\,sen(\theta), y(t)\,cos(\theta));$$

então:

$$\|T_t \times T_\theta\|^2 = y^2(t)\,\big((x'(t))^2 + (y'(t))^2\big);$$

logo, S é uma superfície regular se $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$.

[4] Seja S^2 a esfera centrada na origem de raio 1, parametrizada por:

$$\Phi(u, v) = (sen(u)\,cos(v), sen(u)\,sen(v), cos(u)), \quad (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\,\pi].$$

Temos:

$$T_u = (cos(u)\,cos(v), cos(u)\,sen(v), -sen(u)) \quad \text{e} \quad T_v = (-sen(u)\,sen(v), sen(u)\,cos(v), 0);$$

então:

$$T_u \times T_v = (sen^2(u)\,cos(v), sen^2(u)\,sen(v), cos(u)\,sen(v)).$$

Logo, a esfera parametrizada assim é regular, exceto nos pontos $(0, 0, \pm 1)$.

[5] Seja S a porção do plano xy parametrizado por:

$$\Phi(u, v) = (u, v, 0), \quad (u, v) \in [-1, 1] \times [-1, 1];$$

logo, $T_u \times T_v = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$. Então, a superfície é regular. Note que $\Phi\big([-1, 1] \times [-1, 1]\big) = S$ é o quadrado de vértices $(-1, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$ e $(1, 1, 0)$.

Consideremos agora a seguinte parametrização de S:

$$\Psi(u, v) = (u^3, v^3, 0), \quad (u, v) \in [-1, 1] \times [-1, 1];$$

logo, $T_u \times T_v = (3\,u^2, 0, 0) \times (0, 3\,v^2, 0) = (0, 0, 9\,u^2\,v^2)$. A parametrização é regular, exceto nos pontos $\Psi(0, v)$ e $\Psi(u, 0)$.

Do último exemplo, concluimos que a regularidade de uma superfície depende da parametrização escolhida.

No restante do capítulo, consideraremos apenas superfícies regulares por partes que sejam reunião finita de imagens de superfícies regulares, isto é:

i) $\Phi_i : D_i \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$**, onde** D_i **é uma região do plano fechada, limitada e tal que** ∂D_i **é uma curva simples ou união finita de curvas simples.**

ii) $\mathbf{\Phi_i}$ **é de classe** $\mathbf{C^1}$ **e injetiva num aberto U tal que** $\mathbf{D_i \subset U}$**, exceto possivelmente em** $\mathbf{\partial D_i}$**.**

iii) $\mathbf{S_i = \Phi_i(D_i)}$ **é regular, exceto possivelmente num número finito de pontos.**

Exemplo 8.7.

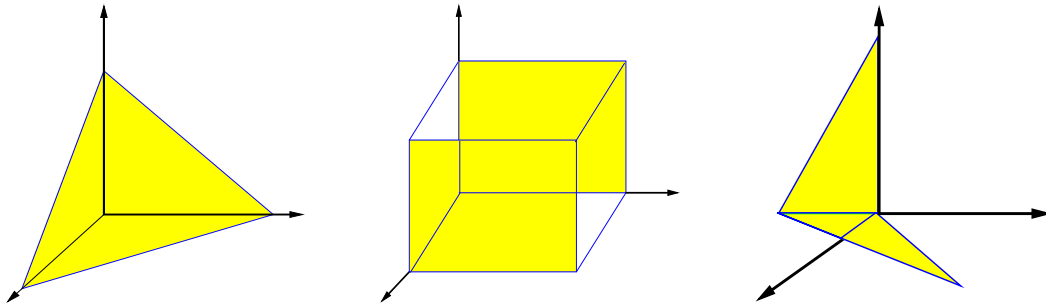



Figura 8.21:

8.7 Área de uma Superfície

Seja uma superfície S nas condições anteriores parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

Definição 8.4. A área da superfície parametrizada S é dada por:

$$\boxed{A(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\|\, du\, dv}$$

A definição faz sentido pois $\|T_u \times T_v\|$ é uma função contínua. No caso em que S é uma união finita de superfícies parametrizadas S_i:

$$\boxed{A(S) = \sum_{i=1}^{n} A(S_i)}$$

Justificaremos a definição no caso em que $D = [a, b] \times [c, d]$. Consideremos $P_1 = \{u_0, u_1, ..., u_n\}$ e $P_2 = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ partições de ordem n dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ respectivamente, tais que:

$$a = u_0 < u_1 < ..... < u_n = b,$$
$$c = v_0 < v_1 < ..... < v_n = d.$$

Denotemos por:

$$\Delta u = u_{i+1} - u_i = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad \Delta v = v_{j+1} - v_j = \frac{d-c}{n}.$$

O conjunto $P_1 \times P_2$ é denominado partição de ordem n de D e dá origem a n^2 sub-retângulos $R_{ij} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$.

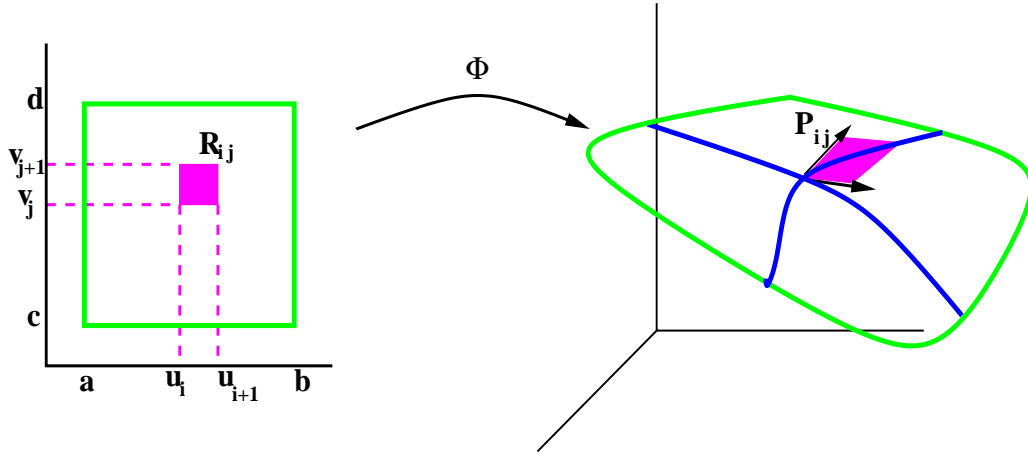



Figura 8.22: A reta $y = 3\,x + 1$.

Sejam $T_{u_i} = T_u(u_i, v_j)$ e $T_{v_j} = T_v(u_i, v_j)$; os vetores $\Delta u T_{u_i}$ e $\Delta v T_{v_j}$ são tangentes a S em $\Phi(u_i, v_j)$ e formam um paralelogramo P_{ij}. Se n cresce, a área do paralelogramo P_{ij} é uma boa aproximação de $\Phi(R_{ij})$; então, $A(P_{ij}) = \|\Delta u T_{u_i} \times \Delta v T_{v_j}\| = \|T_{u_i} \times T_{v_j}\|\,\Delta u\,\Delta v$; logo a área total é dada pela soma de Riemann:

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} A(P_{ij}) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \|T_{u_i} \times T_{v_j}\|\,\Delta u\,\Delta v;$$

fazendo $n \longrightarrow +\infty$, temos:

$$A(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\|\,du\,dv.$$

É possível provar que este limite existe, independente da escolha da partição e da parametrização de S.

Exemplo 8.8.

[1] Determinemos a área da porção do cone parametrizado por:

$$\Phi(u,v) = (u\,cos(v), u\,sen(v), u),$$

onde $(u,v) \in [a,b] \times [0, 2\,\pi]$, $b > a > 0$; logo:

$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{2}\,u;$$

logo, a área do cone é:

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \left[\int_a^b \sqrt{2}\,u\,du\right] dv = \sqrt{2}\,(b^2 - a^2)\,\pi.$$

No caso do cone parametrizado por: $\Phi(u,v) = (u\,cos(v), u\,sen(v), u)$, $(u,v) \in [0,b] \times [0, 2\,\pi]$, temos:

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \left[\int_a^b \sqrt{2}\,u\,du\right] dv = \sqrt{2}\,b^2\,\pi.$$

Dê uma explicação deste fato.

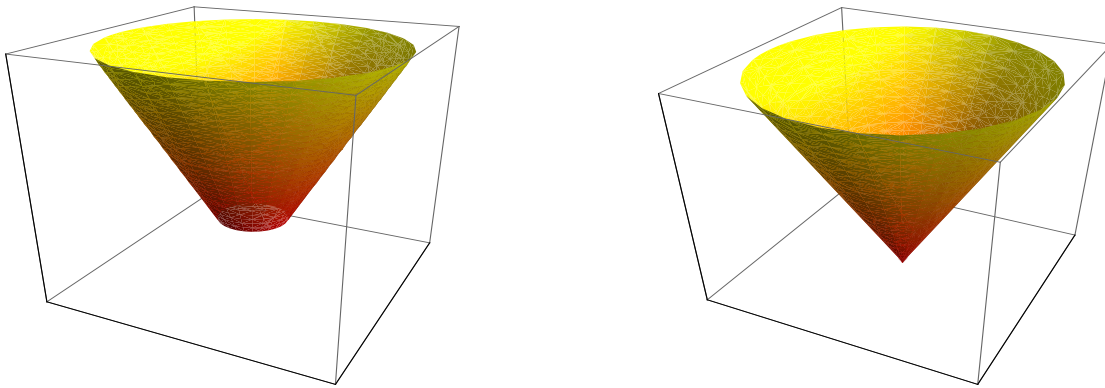



Figura 8.23: Exemplo [1].

[2] Determinemos a área da superfície S gerada pela rotação da curva:

$$\gamma(t) = \big(t, a\,cosh(\frac{t}{a})\big), \quad t \in [-b, b],$$

onde $a,\, b > 0$ no semi-plano superior, em torno do eixo dos x. Parametrizamos S por:

$$\Phi(t,\theta) = (t, a\,cos(\theta)\,cosh\big(\frac{t}{a}\big), a\,sen(\theta)\,cosh\big(\frac{t}{a}\big)), \quad (t,\theta) \in [-b,b] \times [0,2\,\pi].$$

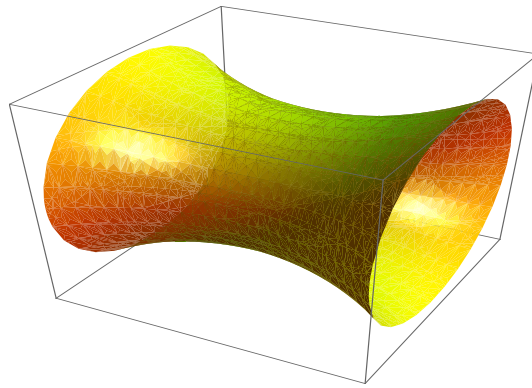



Figura 8.24: Exemplo [2].

Temos:

$$T_u \times T_v = \big(-a\,cosh\big(\frac{t}{a}\big)\,senh\big(\frac{t}{a}\big), a\,cos(\theta)\,cosh\big(\frac{t}{a}\big), a\,sen(\theta)\,senh\big(\frac{t}{a}\big)\big),$$

e $\|T_u \times T_v\| = a\,cosh^2\big(\frac{t}{a}\big)$; então, a área da superfície é:

$$A(S) = a\int_0^{2\pi}\Big[\int_{-b}^{b} cosh^2\big(\frac{t}{a}\big)\,dt\Big]\,d\theta = a\,\pi\,(2\,b + a\,senh\big(\frac{2\,b}{a}\big)).$$

Esta superfície é chamada catenóide.

[3] Determinemos a área da superfície parametrizada por:

$$\Phi(u,v) = (u\,cos(v), u\,sen(v), v), \quad (u,v) \in [-1,1] \times [0,2\,\pi].$$

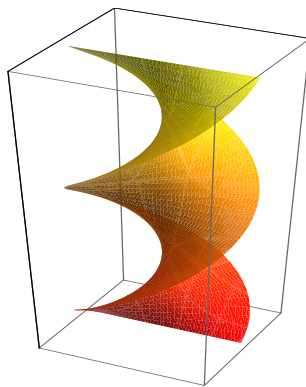



Figura 8.25: Exemplo [3].

Temos, $T_u \times T_v = (sen(v), -cos(v), u)$, e $\|T_u \times T_v\| = \sqrt{1+u^2}$; então, a área da superfície é:

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \left[\int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\, du \right] dv = 2\,\pi\,(\sqrt{2} - ln(\sqrt{2}-1)).$$

Esta superfície é chamada helicóide.

8.8 Aplicações

8.8.1 Área da superfície G(f)

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, tal que $G(f)$ é uma superfície parametrizada por $\Phi(x,y) = (x, y, f(x,y))$ tal que $(x,y) \in D$; então, o vetor normal a $G(f)$ é:

$$T_x \times T_y = \big(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), -1\big);$$

logo: $\|T_x \times T_y\| = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\big)^2\right]^2}$ e,

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]^2}\, dx\, dy.$$

8.8.2 Área da esfera

Parametrizamos a esfera por:

$$\Phi(u,v) = (a\, sen(u)\, cos(v), a\, sen(u)\, sen(v), a\, cos(u)),$$

tal que $(u,v) \in D = [0,\pi] \times [0, 2\,\pi]$, ($a > 0$); então:

$$T_u \times T_v = a\, sen(u)\, \Phi(u,v);$$

portanto $\|T_u \times T_v\| = a^2\, sen(u)$ e:

$$A(S) = a^2 \iint_D sen(u)\, du\, dv = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} sen(u)\, du\, dv = 4\,\pi\, a^2\, u.a.$$

8.8.3 Área de uma superfície de revolução

Seja S uma superfície de revolução parametrizada por

$$\Phi(t,\theta) = (x(t)\,cos(\theta), x(t)\,sen(\theta), z(t)),$$

onde $x,\ z : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^1, $x(t) > 0$ para todo $(t,\theta) \in [a,b] \times [0, 2\,\pi)$. Então, o vetor normal é:

$$T_t \times T_\theta = x(t)\,\big(-cos(\theta)\,z'(t), -sen(\theta)\,z'(t), x'(t)\big);$$

logo, $\|T_t \times T_\theta\| = x(t)\,\sqrt{\big[x'(t)\big)]^2 + \big[z'(t)\big]^2}$; se $\big[x'(t)\big]^2 + \big[z'(t)\big]^2 \neq 0$, para todo t; então:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_0^{2\pi} \int_a^b x(t)\,\sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[z'(t)\big]^2}\,dt\,d\theta \\ &= 2\,\pi \int_a^b x(t)\,\sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[z'(t)\big]^2}\,dt. \end{aligned}$$

Capítulo 9

INTEGRAIS SOBRE SUPERFÍCIES

9.1 Integrais de Funções com Valores Reais

A idéia de integral de superfície de uma função é análoga a de integral de linha, embora geometricamente os conceitos sejam diferentes. A analogia é feita pela relação da integral de superfície com a área da superfície, que é semelhante à relação da integral de linha com o comprimento de arco.

Definição 9.1. Sejam U um aberto tal que $S \subset U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e S uma superfície regular parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; logo, $f \circ \Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua. **A integral de f sobre S** é denotada e definida por:

$$\boxed{\iint_S f\, dS = \iint_D f(\Phi(u,v))\, \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, du\, dv}$$

A integral de f sobre S independe da escolha da parametrização de S. Se $f = 1$, então:

$$\boxed{\iint_S f\, dS = A(S)}$$

No caso em que S é uma união finita de superfícies parametrizadas S_i:

$$\boxed{\iint_S f\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f\, dS_i}$$

9.2 Aplicações

Se $f \geq 0$ é uma função de densidade sobre S (contínua), então, o centro de massa de S é dado por:

$$\overline{x} = \frac{1}{M(S)} \iint_S x\, f\, dS,$$
$$\overline{y} = \frac{1}{M(S)} \iint_S y\, f\, dS,$$
$$\overline{z} = \frac{1}{M(S)} \iint_S z\, f\, dS,$$

onde $M(S) = \iint_S f\, dS$ é a massa total de S.

Se S é o gráfico da função $z = h(x,y)$, então:

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(x,y,h(x,y))\ dsize \sqrt{1 + \big(\frac{\partial h}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial h}{\partial y}\big)^2}\, dx\, dy.$$

Seja $f(x,y,z) = z - h(x,y)$ tal que h é classe C^1; logo, o vetor normal a S é:

$$\vec{n} = \big(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\big).$$

Denotando por θ o ângulo formado por $\vec{n}$ e $\tilde{\mathbf{k}}$; temos:

$$\frac{1}{cos(\theta)} = \sqrt{1 + \big(\frac{\partial h}{\partial x}\big)^2 + \big(\frac{\partial h}{\partial y}\big)^2},$$

donde:

$$\iint_S f\, dS = \iint_D \frac{f(x,y,h(x,y))}{cos(\theta)}\, dx\, dy.$$

Exemplo 9.1.

[1] Calcule $\iint_S x^2\, z\, dS$, onde S é a porção de superfície definida por $z^2 = x^2 + y^2$ limitada por $z = 1$ e $z = 4$.

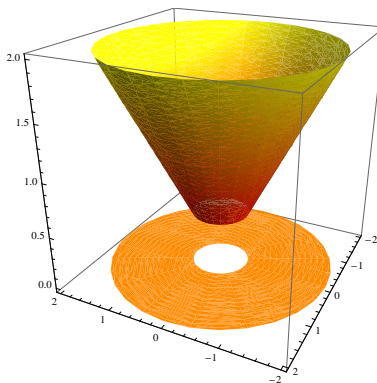



Figura 9.1: Exemplo [1].

Considere a seguinte parametrização de S:

$$\Phi(u,v) = (u\,cos(v), u\,sen(v), u), \quad (u,v) \in [1,4] \times [0, 2\,\pi],$$

$f(\Phi(u,v)) = u^3\,cos^2(v)$ e $\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{2}\,u$; logo:

$$\iint_S x^2\,z\,dS = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\int_1^4 u^4\,cos^2(v)\,du\right]dv = \frac{1023\sqrt{2}\,\pi}{5}.$$

[2] Calcule $\displaystyle\iint_S x\,dS$, se S é a superfície definida por $z = x^2$, onde $(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$.

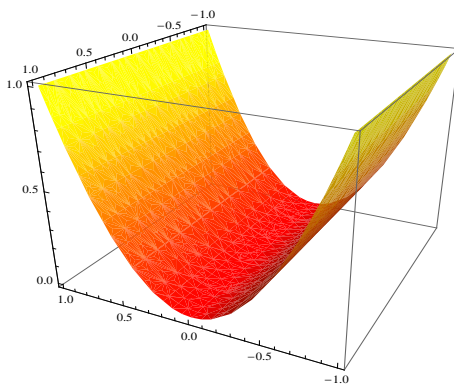



Figura 9.2: Exemplo [2].

Neste caso $h(x,y) = x^2$; logo, $f(x,y,x^2) = x$ e $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + 4\,x^2}$; então:

$$\iint_S x\,dS = \int_{-1}^1\left[\int_{-1}^1 x\sqrt{1 + 4\,x^2}\,dx\right]dy = \frac{(1+4\,x^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\Bigg|_{-1}^1 = 0.$$

[3] Calcule $\displaystyle\iint_S y\,dS$, onde S é o plano $x+y+z=1$ no primeiro quadrante.

O vetor normal a S é $\vec{n}=(1,1,1)$; logo, $cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, e:

$$\iint_S y\,dS=\sqrt{3}\iint_D y\,dx\,dy,$$

onde D é região definida por $0\le x\le 1$ e $0\le y\le 1-x$; logo,

$$\sqrt{3}\iint_D y\,dx\,dy=\sqrt{3}\int_0^1\left[\int_0^{1-x} y\,dy\right]dx=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

[4]) Calcule $\displaystyle\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, onde $S=S_1\cup S_2$, sendo S_1 a superfície de revolução gerada por $z=1-x$, $0\le x\le 1$ girando em torno do eixo dos z e S_2 é a tampa de S_1, (um disco de raio 1 no plano xy).

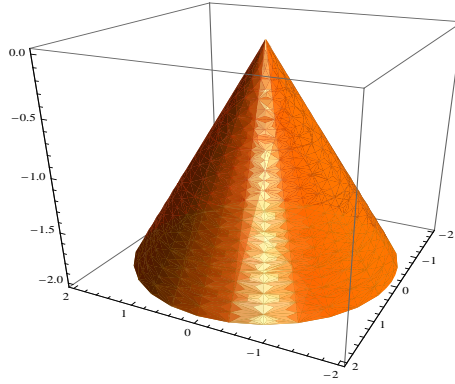



Figura 9.3: Exemplo [4].

Parametrizamos S_1 por $\Phi_1(u,v)=(u\,cos(v),u\,sen(v),1-u)$, $(u,v)\in[0,1]\times[0,2\pi]$. Logo, $f(\Phi_1(u,v))\,\|T_u\times T_v\|=\sqrt{2}\,u^2$; então,

$$\iint_{S_1} f\,dS_1=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 u^2\,du\right]dv=\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{3}.$$

Parametrizamos S_2 por $\Phi_2(u,v)=(u\,cos(v),u\,sen(v),0)$, $(u,v)\in[0,1]\times[0,2\pi]$.
Logo, $f(\Phi_2(u,v))\,\|T_u\times T_v\|=u^2$; então:

$$\iint_{S_2} f\,dS_2=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 u^2\,du\right]dv=\frac{2\pi}{3}$$

e:

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS=\iint_{S_1}\sqrt{x^2+y^2}\,dS_1+\iint_{S_2}\sqrt{x^2+y^2}\,dS_2=\frac{2\pi\,(1+\sqrt{2})}{3}.$$

9.3 Integrais de Campos de Vetores

Seja S uma superfície parametrizada regular. Existem duas escolhas possíveis para definir o campo de vetores normais unitários a S:

$$\vec{n}_1(\Phi(u,v)) = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \quad \text{e} \quad \vec{n}_2(\Phi(u,v)) = -\vec{n}_1(\Phi(u,v)).$$

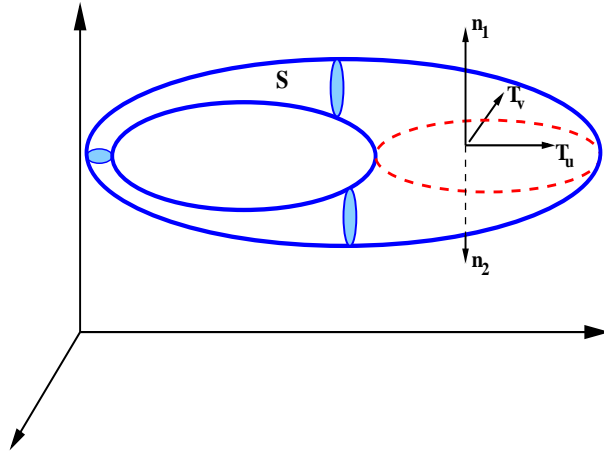



Figura 9.4:

Note que $\vec{n}_1 : S \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é um campo de vetores unitários sobre a superfície S.

Definição 9.2. Uma superfície parametrizada S é dita orientável se é possível fixar em S um campo de vetores normais não nulo e contínuo. Caso contrário, é dita não orientável.

Uma vez escolhida a orientação, a superfície é dita orientada.

É possível provar que toda superfície que é imagem de uma única parametrização é orientável; por exemplo, os subconjuntos abertos em $\mathbb{R}^3$ e $G(f)$ se f é de classe C^k. Veja **[EL]** na bibliografia.

Embora a maioria das superfícies que vamos estudar seja orientável, apresentaremos um exemplo de superfície não orientável (veja o exemplo [2]). A escolha de um dos campos de vetores normais para a orientação de uma superfície é totalmente arbitrária.

Definição 9.3. Seja $S = S_1 \cup S_2$ em que S_1 e S_2 tem bordo comum, então S é orientável se

1. S_1 e S_2 são orientáveis.

2. ∂S_1 e ∂S_2 são curvas orientadas positivamente de modo que ∂S_1 e ∂S_2 são percorridas em sentidos contrários.

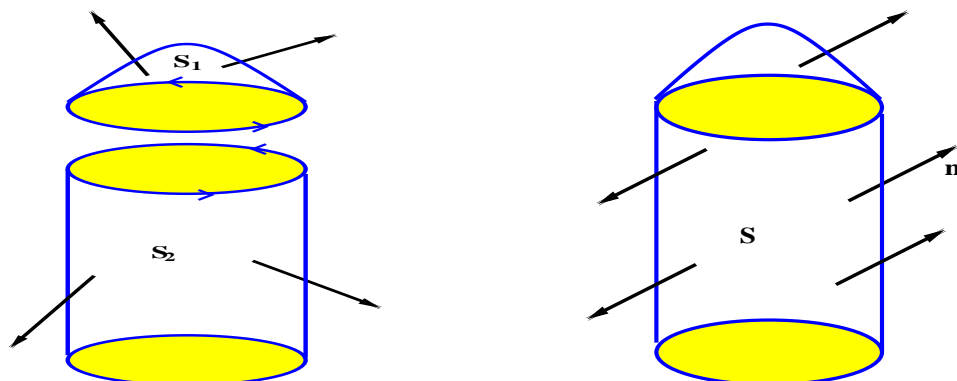



Figura 9.5:

A definição 2 vale se $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots\ldots \cup S_n$.

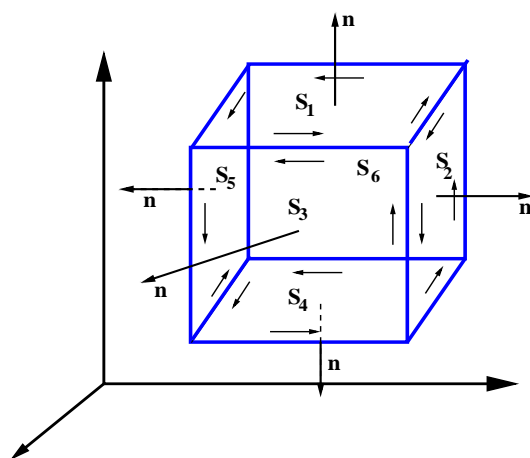



Figura 9.6:

Exemplo 9.2.

[1] Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1; o gráfico $G(f)$ é uma superfície regular orientável. De fato:

$$\big(T_u \times T_v\big)(u,v) = \big(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v), \frac{\partial f}{\partial v}(u,v), -1\big)$$

é um campo de vetores normais contínuo.

[2] **Faixa de Möebius:** A Faixa de Moebius M é construida tomando o retângulo $[0,\pi] \times [-1,1]$, fixando as arestas opostas AB e CD, efetuando um giro de 180 graus mantendo a

aresta AB fixa e "colando"A com D e B com C, de modo que as arestas AB e CD fiquem coincidentes após a rotação.

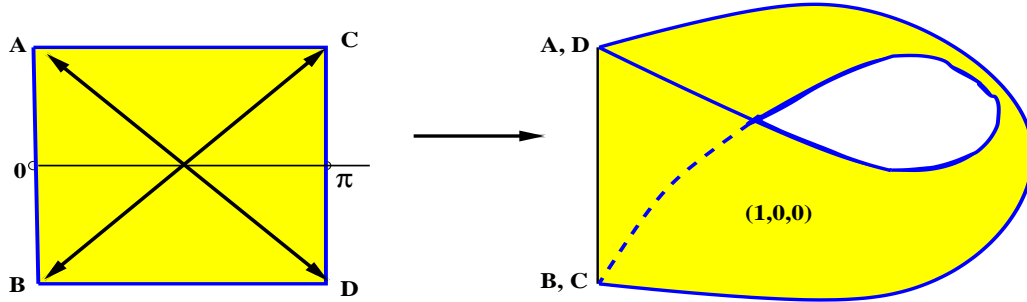



Figura 9.7: A faixa de Moebius.

Parametrização: A faixa de Moebius M pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\Phi(u,v) = ((1-v\,sen(u))\,cos(2\,u), (1-v\,sen(u))\,sen(2\,u), v\,cos(u)), \quad (u,v) \in [0,\pi]\times[-1,1].$$

Note que $\Phi([0,\pi]\times[-1,1]) = M$ e $\Phi(0,0) = \Phi(\pi,0) = (1,0,0)$.
O vetor normal a M é:

$$T_u \times T_v = (a(u,v), b(u,v), c(u,v)),$$

onde $a = cos(u) + cos(3\,u) - 4\,v\,cos^3(u)\,sen(u)$, $b = v\,cos(2\,u) - 4\,cos^2(u)\,sen(u)\,(v\,sen(u) - 1)$ e $c = -2\,sen(u)\,(v\,sen(u) - 1)$. Por outro lado

$$(T_u \times T_v)(0,0) = (2,0,0) \quad \text{e} \quad (T_u \times T_v)(\pi,0) = (-2,0,0);$$

logo, $T_u \times T_v$ não é um campo contínuo. Portanto M é não orientável. É possível provar que não existe parametrização que torne orientable a faixa de Moebius.

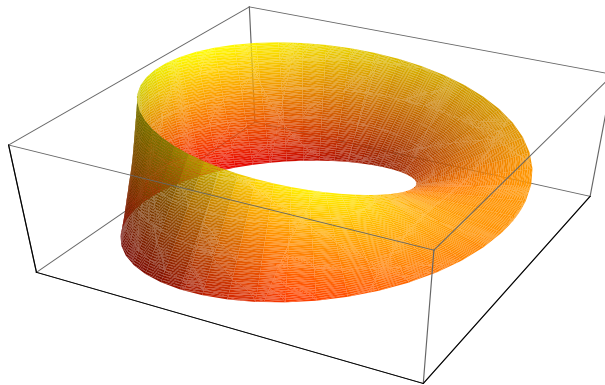



Figura 9.8: A faixa de Moebius.

A parte de S onde o campo normal fixado $\vec{n}$ "emerge"é chamado lado positivo de S, analogamente o lado negativo de S é o lado em que $-\vec{n}$ emerge.

Intuitivamente uma superfície orientável possui dois lados bem definidos.

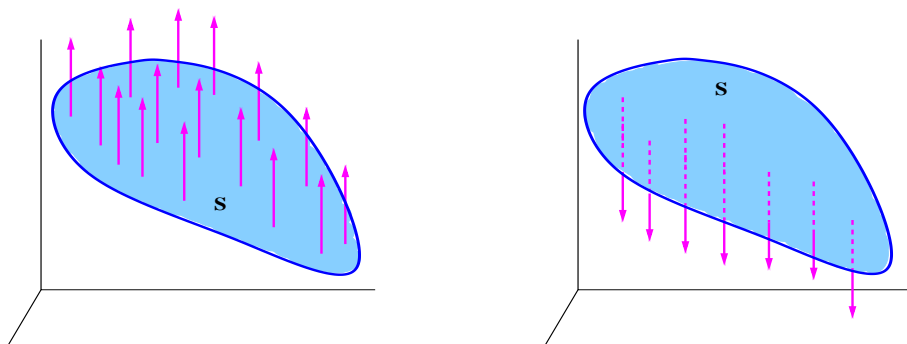



Figura 9.9: Orientações de uma superfície.

Seja a esfera unitária S^2; escolhendo o campo de vetores normais a S^2, o vetor posição de S^2, este aponta para o lado externo de S^2, o que corresponde a nossa intuição. Agora que S^2 está orientada, a parametrizamos por $\Phi(u,v) = (cos(u)\,sen(v), sen(u)\,sen(v), cos(v))$ tal que $(u,v) \in [0, 2\,\pi] \times [0, \pi]$. O campo de vetores normais é:

$$\Phi_u \times \Phi_v = -sen(v)\,\Phi(u,v);$$

como $-sen(v) \leq 0$ se $v \in [0, \pi]$, este vetor normal aponta para o lado interno de S^2. Diz-se que esta parametrização inverte a orientação.

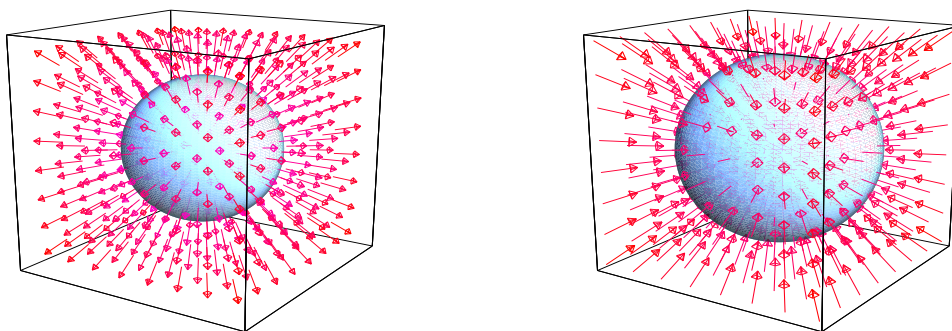



Figura 9.10:

Em geral, se S é uma superfície orientável pela escolha do campo de vetores normais unitários $\vec{n}$, uma parametrização Φ de S preserva orientação se $T_u \times T_v$ tem a mesma direção de $\vec{n}(\Phi(u,v))$

9.4 Definição da Integral de Superfície de Campos de Vetores

Sejam S uma superfície regular orientável, U um aberto tal que $S \subset U$, $F : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo contínuo e $\vec{n}$ um dos campos normais unitários contínuo em S. Denotemos por $F_n = F \cdot \vec{n}$ a componente normal de F.

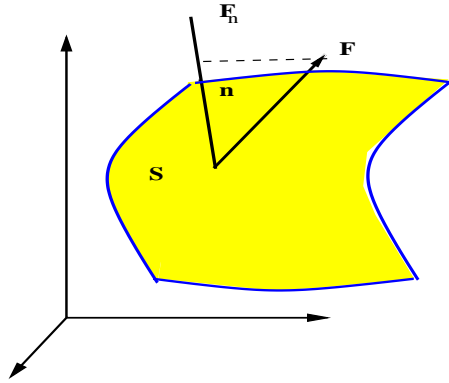



Figura 9.11:

Definição 9.4. A integral do campo F sobre S é denotada e definida por:

$$\boxed{\iint_S F\,dS = \iint_S \big[F \cdot \vec{n}\big]\,dS = \iint_S F_n\,dS.}$$

Se $\Phi : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é a parametrização de S, então:

$$\begin{aligned} \iint_S \big(F \cdot \vec{n}\big)\,dS &= \iint_D \big(F(\Phi(u,v)) \cdot \vec{n}(\Phi(u,v))\big)\,\|T_u \times T_v\|\,du\,dv \\ &= \iint_D \big(F(\Phi(u,v)) \cdot (T_u \times T_v)\big)\,du\,dv. \end{aligned}$$

Logo:

$$\boxed{\iint_S F\,dS = \iint_D \big(F(\Phi(u,v)) \cdot (T_u \times T_v)\big)\,du\,dv}$$

Se escolhemos $-\vec{n}$ a integral muda de sinal. A integral de superfície de um campo de vetores numa superfície orientada não depende da parametrização escolhida para a superfície.

9.5 Interpretação Geométrica da Integral

Se F é um campo de vetores contínuo definido num aberto U, que representa um campo de velocidade associado ao escoamento de um fluido em cada ponto de U, a integral de superfície de F sobre a superfície $S \subset U$ é chamada de fluxo ou taxa de escoamento por unidade de tempo através da superfície S. Nos pontos onde F fizer um ângulo agudo com o vetor normal a S teremos uma contribuição positiva ao fluxo e onde F fizer um ângulo obstuso com o vetor normal a S teremos uma contribuição negativa ao fluxo. Notamos que o fato de a contribuição ser positiva ou negativa depende da orientação escolhida.

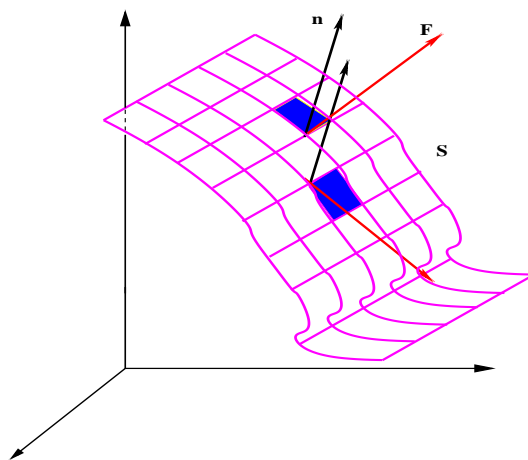



Figura 9.12:

No estudo do fluxo do calor, se $T = T(x, y, z)$ é de classe C^1 e representa a temperatura no ponto $(x, y, z) \in W \subset \mathbb{R}^3$, então, o calor flui como o campo $F = -k\,\nabla T$, $(k > 0)$. Logo:

$$\iint_S F\,dS$$

é a razão total do fluxo do calor através da superfície S.

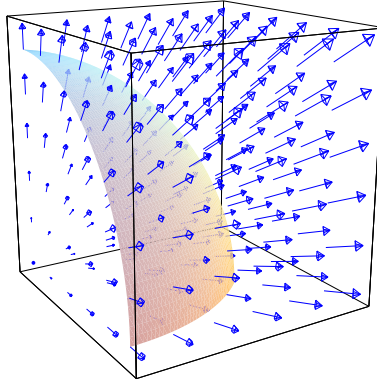



Figura 9.13:

Exemplo 9.3.

[1] Determine o fluxo do campo elétrico:

$$F(x,y,z) = \frac{q}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,(x,y,z),$$

gerado por uma carga q que passa através da esfera de raio 1, utilizando a normal exterior. Parametrizamos a esfera S^2 por:

$$\Phi(u,v) = (sen(u)\,cos(v), sen(u)\,sen(v), cos(u)), \quad (u,v) \in [0,\pi)] \times [0, 2\,\pi];$$

logo

$$\begin{aligned} &T_u \times T_v = sen(u)\,\Phi(u,v),\\ &F(\Phi(u,v)) = q\,\Phi(u,v), \quad \text{e}\\ &F(\Phi(u,v)) \cdot (T_u \times T_v) = sen(u)\,q. \end{aligned}$$

Então:

$$\int_S F\,dS = q\,\iint_S sen(u)\,du\,dv = 4\,\pi\,q.$$

Este resultado é um caso particular da chamada lei de Gauss da Eletrostática.

[2] Seja $T(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z)}$ a temperatura em cada ponto de um parabolóide circular de altura 1. Determine o fluxo do calor através da superfície, utilizando a normal exterior.

Parametrizamos o parabolóide circular S por:

$$\Phi(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$$

tal que $x^2 + y^2 \leq 1$; logo:

$$T_x \times T_y = (2\,x, 2\,y, -1) \quad \text{e} \quad F = -\nabla T(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z)}\,(2\,x, 2\,y, 1);$$

então,

$$\begin{aligned} &F(\Phi(x,y)) = -e^{-2\,(x^2+y^2)}\,(2\,x, 2\,y, 1) \quad \text{e} \\ &F(\Phi(x,y)) \cdot (T_x \times T_y) = -e^{-2\,(x^2+y^2)}\,(4\,x^2 + 4\,y - 1). \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \iint_S F &= -\iint_{x^2+y^2\leq 1} e^{-2\,(x^2+y^2)}\,(4\,x^2 + 4\,y^2 - 1)\,dx\,dy \\ &= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{2r^2}\,r\,(4\,r^2 - 1)\,dt\,dr \\ &= \frac{\pi}{2}\,(5\,e^{-2} - 1). \end{aligned}$$

9.6 Exercícios

1. Obtenha uma parametrização das seguintes superfícies:

   (a) $x = z$

   (b) $x + y + z = 1$.

   (c) $y^2 + z^2 = a^2$

   (d) $y^2 + 9\,z^2 = 9$

   (e) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

   (f) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   (g) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = a^2$

   (h) $z = y^2$

   (i) $x = y^2$

   (j) $z = x^2$

   (k) $-3\,x^2 + 5\,y^2 - z^2 = 1$

   (l) $-3\,x^2 - 5\,y^2 + z^2 = 1$

2. Verifique que:

   (a) $\Phi(u,v) = (a\,cos(u)\,cos(v), b\,cos(u)\,sen(v), c\,sen(u))$, $(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\,\pi]$ é uma parametrização do elipsóide centrado na origem.

   (b) $\Phi(u,v) = (a\,cosh(u)\,cos(v), b\,cosh(u)\,sen(v), c\,senh(u))$, $(u,v) \in \mathbb{R} \times [0,2\,\pi]$ é uma parametrização do hiperbolóide de uma folha centrado na origem.

   (c) $\Phi(u,v) = (a\,senh(u)\,cos(v), b\,senh(u)\,sen(v), c\,cosh(u))$, $(u,v) \in \mathbb{R} - \{0\} \times [0,2\,\pi]$ é uma parametrização do hiperbolóide de duas folha centrado na origem.

3. Identifique as superfícies e verifique se as mesmas são regulares:

   (a) $\Phi(u,v) = (u\,cos(v), u\,sen(v), 0)$, $(u,v) \in [0,+\infty) \times [0,2\,\pi]$.

   (b) $\Phi(u,v) = (u\,cos(v), u\,sen(v), 1-u^2)$, $(u,v) \in [0,+\infty) \times [0,2\,\pi]$.

   (c) $\Phi(u,v) = (4\,cos(u), sen(u), v)$, $(u,v) \in [0,2\,\pi] \times \mathbb{R}$.

   (d) $\Phi(u,v) = (u, v, u+v)$, $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   (e) $\Phi(u,v) = (u\,cos(v), u\,sen(v), u^2)$, $(u,v) \in [0,+\infty) \times [0,2\,\pi]$.

4. Considere as superfícies 2.2) e 2.3) do exercício [2]. Esboce as curvas coordenadas para $u_0 = 0$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ e $v_0 = \frac{\pi}{2}$.

5. Determine uma parametrização para a superfície de revolução obtida:

   (a) Girando-se o círculo $(x-a)^2 + z^2 = b^2$, $0 < b < a$, em torno do eixo dos z. (Toro de revolução).

   (b) Girando-se a curva a curva $y = cos(x)$, $x \in [0, 2\,\pi]$, em torno do eixo dos z.

6. Determine a área do toro de revolução.

7. O helicóide é parametrizado por $\Phi(u,v) = (u\,cos(v), u\,sen(v), v)$, $(u,v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\,k\,\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$:

   (a) Esboce o helicóide para $(u,v) \in [-5,5] \times [0, 6\,\pi]$ e verifique se é regular?

   (b) Determine a área do helicóide para $(u,v) \in [-5,5] \times [0, 6\,\pi]$.

Capítulo 10

TEOREMAS DE STOKES E GAUSS

10.1 Teorema de Stokes

Seja S uma superfície regular orientável, parametrizada por $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que ∂D é uma curva fechada simples, diferenciável por partes. Suponhamos que S é orientada com o campo de vetores normais unitários $\vec{n}$.

O bordo da superfície S é denotado e definido por $\partial S = \Phi(\partial D)$. Se γ é uma parametrização da curva ∂D, então o bordo de S é parametrizado por $\partial S = \Phi(\gamma(I))$.

Seja $\vec{t}$ o campo de vetores tangentes unitários à curva ∂S e $\vec{b}$ o campo de vetores unitários em ∂S perpendiculares a ∂S e tangentes a S, (apontando no sentido de S; veja o próximo desenho).

Definição 10.1. A curva ∂S é orientada positivamente se $\vec{n} = \vec{t} \times \vec{b}$.

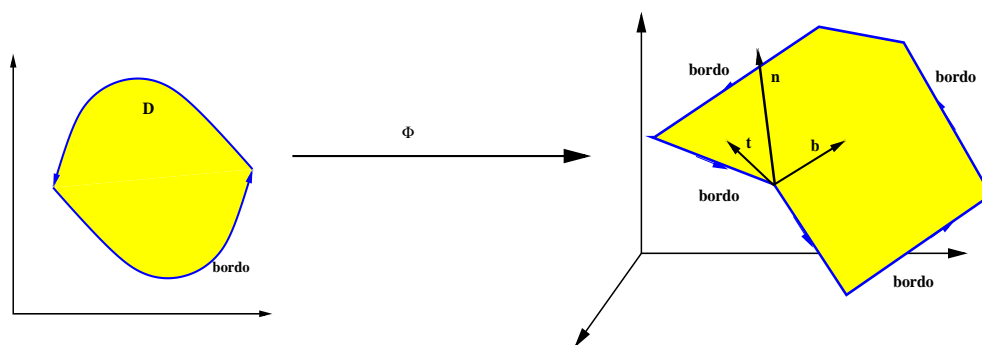



Figura 10.1:

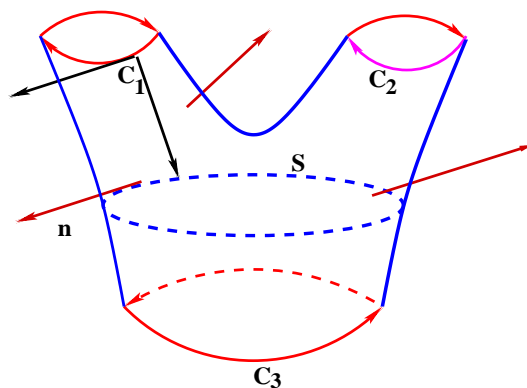



Figura 10.2:

Exemplo 10.1.

[1] Seja S o parabolóide parametrizado por $\Phi(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$, $(x,y) \in D$ onde D é o disco unitário; $\partial D = \{(x,y)\,/\,x^2+y^2=1\}$, logo:

$$\partial S = \Phi(\partial D) = \{(x,y,1)\,/\,x^2+y^2=1\}.$$

O campo normal é $T_x \times T_y = (-2\,x, -2\,y, 1)$, o qual induz a orientação de S; parametrizamos ∂D por:

$$\gamma(t) = (cos(t), sen(t)), \quad t \in [0, 2\,\pi] \quad \text{e} \quad \Phi(\gamma(t)) = (cos(t), sen(t), 1).$$

Logo, ∂S é percorrido no sentido positivo em relação à normal de S.

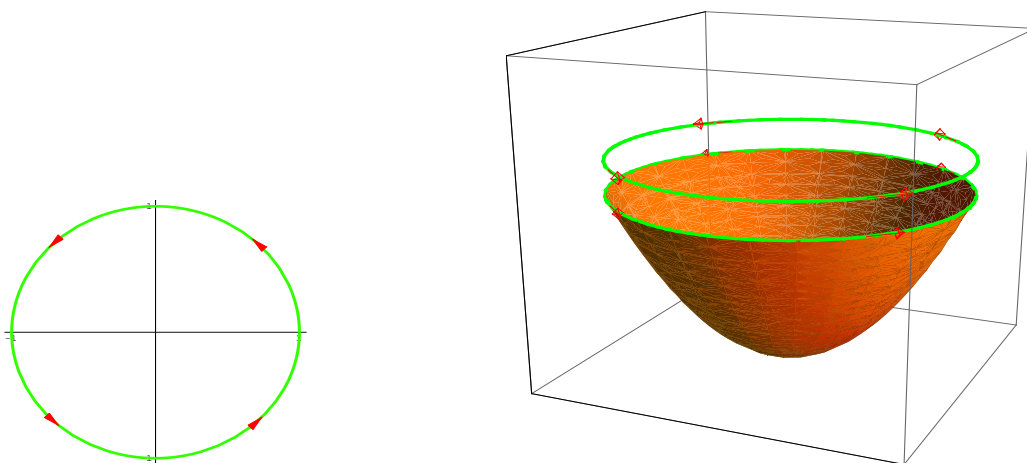



Figura 10.3: Exemplo [1].

[2] Seja a porção de cilindro definida por $S = \{(x,y,z)\,/\,x^2+y^2=1,\, 0 < z < 1\}$. A fronteira ∂S é formada por duas curvas disjuntas:

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \,/\, x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \{(x, y, z) \,/\, x^2 + y^2 = 1,\ z = 1\};$$

se escolhermos como vetor normal qualquer vetor proporcional a $(cos(\theta), sen(\theta), 0)$, Γ_1 é percorrida no sentido positivo e Γ_2 em sentido negativo.

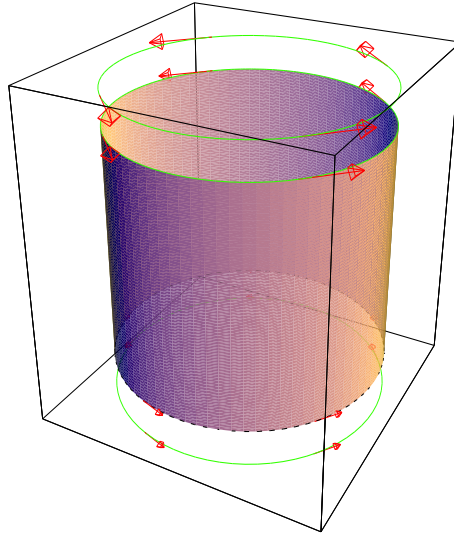



Figura 10.4: Exemplo [2].

Teorema 10.1. (Stokes) Seja S uma superfície regular orientada de classe C^1 tal que $\partial S = C$ é uma curva fechada simples de classe C^1 por partes orientada positivamente. Se F um campo de vetores de classe C^1, definido num aberto U tal que $S \subset U$, então:

$$\boxed{\iint_S rot(F)\, dS = \oint_{\partial S} F.}$$

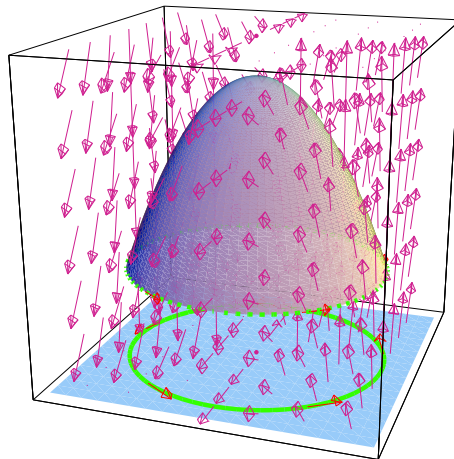



Figura 10.5: Teorema de Stokes.

Se S está contida no plano xy, nas condições do teorema de Stokes, então, $\vec{n} = \tilde{\mathbf{k}}$.

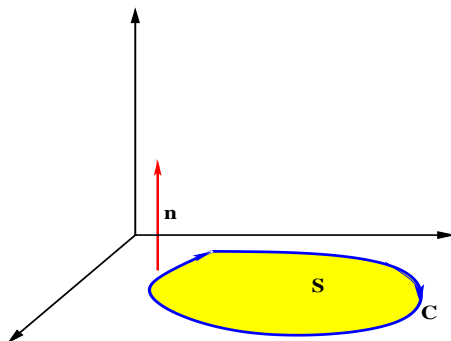



Figura 10.6:

Se consideremos o campo $F = (F_1, F_2, 0)$, então, $rot(F) \cdot \tilde{\mathbf{k}} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$, e:

$$\iint_S \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dS = \oint_{\partial S} F,$$

um resultado análogo ao teorema de Green.

Observação 10.1. O teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um campo de vetores F de classe C^1 através de uma superfície orientável S é igual ao trabalho (circulação) realizado por F ao longo da curva ∂S, cuja orientação é compatível com a de S.

Exemplo 10.2.

[1] Calcule $\displaystyle\iint_S rot(F)\, dS$, onde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = -1 + y^2 + z^2,\ x \leq 0\}$ e o campo F é definido $F(x, y, z) = (x\,z, z\,e^x, -y)$.

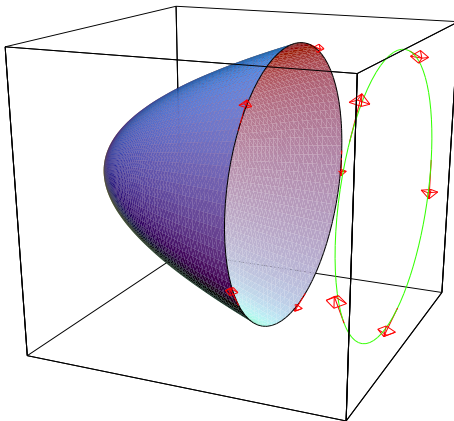



Figura 10.7: Exemplo [1].

S pode ser parametrizada como gráfico da função $f(y,z) = -1 + y^2 + z^2$; logo, S é orientável; $D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 + z^2 < 1\}$ e $\partial S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 + z^2 = 1,\, x = 0\}$ pode ser parametrizada pot $\gamma(t) = (0, cos(t), sen(t))$, $t \in [0, 2\,\pi]$. Pelo teorema de Stokes:

$$\iint_S rot(F)\, dS = \oint_{\partial S} F = -\int_0^{2\pi} dt = -2\,\pi.$$

[2] Calcule $\displaystyle\oint_C y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz$, onde C é o bordo do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante, no sentido anti-horário.

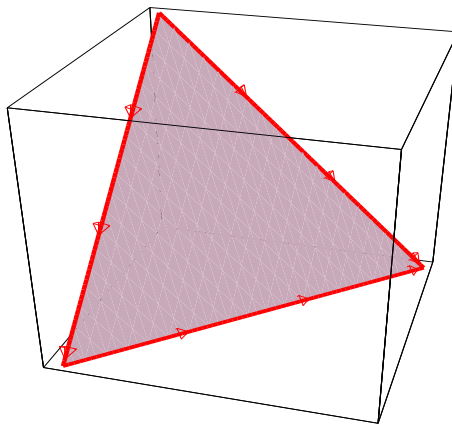



Figura 10.8: Exemplo [2].

Aplicamos o teorema de Stokes para $F(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$, então o rotacional de F é $rot(F)(x,y,z) = -2\,(z,x,y)$. Parametrizando S por:

$$\Phi(x,y) = (x, y, 1 - x - y), \quad (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$$

com normal $(1,1,1)$, temos: $rot(F(\Phi(x,y))) \cdot (1,1,1) = (0, -2\,x, 2\,(x-1)) \cdot (1,1,1) = -2$; seja $C = \partial S$; então:

$$\oint_C F = \iint_S rot(F)\, dS = -2 \iint_S dS = -2 \iint_D dx\, dy = -2\, A(D);$$

onde $A(D)$ é a área da região $D = \{(x,y) \,/\, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 - x\}$:

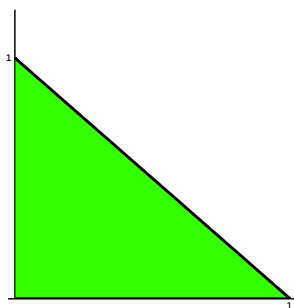



Figura 10.9: Região D.

Logo:

$$\oint_C F = -2 \int_0^1 \int_0^{1-x} dx\, dy = -1.$$

[3] Calcule $\displaystyle\oint_C (2\,x\,y\,z + 2\,x)\,dx + x^2\,z\,dy + x^2\,y\,dz$, onde C é a curva obtida pela interseção da superfície $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ com o plano $x + y = 2$, especificando a orientação escolhida.

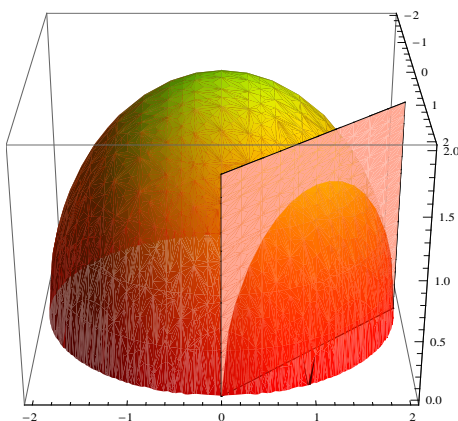



Figura 10.10: Exemplo [3].

Não é possivel aplicar o teorema de Stokes pois o bordo da superfície S, a curva C não é fechada. Seja $\gamma = C \cup C_1$, onde C_1 é o segmento de reta que liga os pontos $(0,2,0)$ e $(2,0,0)$:

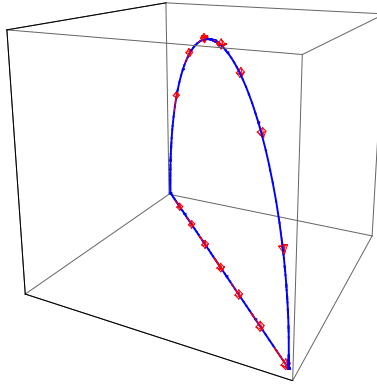



Figura 10.11: A curva γ.

A curva γ é fechada e diferenciável por partes, pois C e C_1 são diferenciáveis. Podemos aplicar o teorema de Stokes a superfície S tal que $\partial S = \gamma$:

$$\oint_{\gamma} F = \iint_{S} rot(F)\, dS;$$

por outro lado, $rot(F) = \vec{0}$, logo:

$$\oint_{\gamma} F = 0.$$

A curva C_1 pode ser parametrizada por $\rho(t) = (2\,t, 2\,(1-t), 0)$, $t \in [0,1]$, logo:

$$0 = \oint_{\gamma} F = \int_{C} F + \int_{C_1^+} F, \quad \text{então} \quad \int_{C} F = -\int_{C_1^+} F.$$

Calculando diretamente, $F(\rho(t)) \cdot \rho'(t) = -8\,t$, então:

$$\int_{C} F = -\int_{C_1^+} F = \int_{0}^{1} (8\,t)\, dt = 4.$$

[4] Determine o fluxo do rotacional do campo de vetores $F(x,y,z) = (y^3, x^3, e^z)$ através da superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$, com normal exterior.

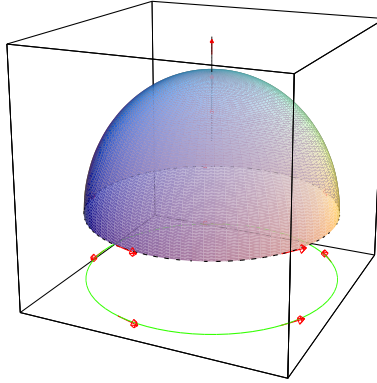



Figura 10.12: Exemplo [4].

Devemos calcular $\iint_S rot(F)\,dS$, aplicando o teorema de Stokes:

$$\iint_S rot(F)\,dS = \oint_{\partial S} F.$$

Onde ∂S é a interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=2$ com o cilindro $x^2+y^2=1$; logo, C é um círculo de raio 1 centrado em $(0,0,1)$ que parametrizamos por $\gamma(t)=(cos(t), sen(t), 1)$, $t \in [0, 2\,\pi]$ e:

$$\iint_S rot(F)\,dS = \oint_C F = \int_0^{2\pi} \big(cos^4(t) - sen^4(t)\big)\,dt = \int_0^{2\pi} cos(2\,t)\,dt = 0.$$

10.2 Aplicação: Lei de Faraday

Sejam $E = E(x,y,z,t)$ e $H = H(x,y,z,t)$ campos elétrico e magnético, respectivamente, no tempo t. Partindo da terceira equação de Maxwell, na forma diferencial:

$$rot(E) = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Se S é uma superfície nas hipóteses do teorema de Stokes:

$$\oint_{\partial S} E = \iint_S rot(E)\,dS = -\iint_S \frac{\partial H}{\partial t}\,dS.$$

Se H é de classe C^1, então $\displaystyle\int_S \frac{\partial H}{\partial t}\,dS = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S H\,dS$; logo:

$$\oint_{\partial S} E = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S H\,dS.$$

Observações 10.1.

1. Esta última igualdade é chamada de lei de Faraday.

2. $\oint_{\partial S} E$ é a voltagem ao longo da curva ∂S e $\iint_S H\,dS$ é o fluxo magnético.

3. Assim, a lei de Faraday afirma que a voltagem ao longo de uma curva fechada é igual a menos a razão do fluxo magnético através da superfície.

10.3 Interpretação do Teorema de Stokes

O teorema do valor médio para integrais de funções de uma variável é válido em várias variáveis. De fato.

Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ fechado, limitado e $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua; então existe $P_0 \in K$ tal que:

Se n=2, então $\iint_K f(x,y)\,dx\,dy = f(P_0)\,ar(K)$, onde $A(K)$ é a área de K.

Se n=3, então $\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = f(P_0)\,vol(K)$, onde é o volume de K.

Seja F um campo de classe C^1 definido em $A \subset \mathbb{R}^3$ que representa a velocidade de escoamento de um fluido no ponto $(x,y,z) \in A$. Se a componente tangencial de F ao longo de uma curva fechada, é não nula, teremos contribuição para um movimento circulatório.

Sejam $P \in A$ e $\varepsilon > 0$ (ε pequeno). Denotemos o disco fechado centrado em $P \in A$ e raio ε por: $D_\varepsilon(P) = \{R \in A \,/\, \|R - P\| \leq \varepsilon\}$ e $\vec{T}$ o vetor tangente unitário a $\partial D_\varepsilon(P)$; $D_\varepsilon(P)$ é fechado e limitado; então, pelo teorema do valor médio, existe $P_\varepsilon \in D_\varepsilon(P)$ tal que:

$$\oint_{\partial D_\varepsilon(P)} \vec{F} = \iint_{D_\varepsilon(P)} rot(\vec{F})\,dS = rot(\vec{F})(P_\varepsilon)\,\pi\,\varepsilon^2.$$

Seja $\vec{n}(P)$ o vetor normal unitário em P; logo:

$$rot(\vec{F})(P) \cdot \vec{n}(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\,\varepsilon^2} \oint_{\partial D_\varepsilon(P)} \vec{F},$$

pois, $P_\varepsilon \overrightarrow{P}$ se $\varepsilon \overrightarrow{0}$. Logo, a componente $rot(\vec{F})$ em qualquer direção normal é o limite da circulação de F por unidade de área. Fixado P, o $rot(\vec{F})$ é definido quando o limite anterior atinge seu valor máximo, o qual ocorre quando o limite da circulação por unidade de área atinge seu valor máximo (quando a área tende a zero).

Em Dinâmica de Fluidos o rotacional de um campo num ponto é dito vórtice local.

Se S_1 e S_2 são superfícies tal que $C = \partial S_1 = \partial S_2$, nas hipóteses do teorema de Stokes, então:

$$\iint_{S_1} rot(F)\, dS = \oint_{C^+} F = -\oint_{C^-} F = -\iint_{S_2} rot(F)\, dS.$$

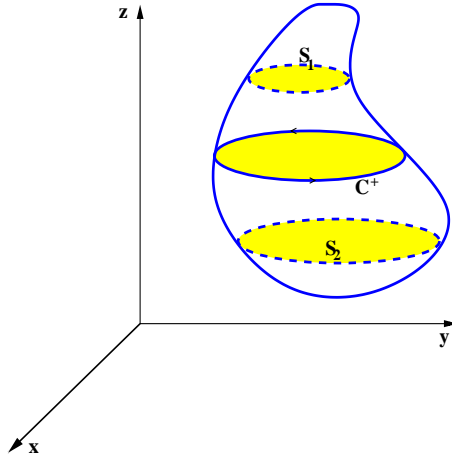



Figura 10.13:

10.4 Caracterização dos Campos Conservativos no Espaço

Teorema 10.2. Seja F um campo de classe C^1 definido em $\mathbb{R}^3$, exceto para um número finito de pontos. São equivalentes as seguintes condições:

1. $\oint_C F = 0$ para toda curva fechada de classe C^1 por partes.

2. $\int_{P_1}^{P_2} F$ independe da curva de classe C^1 por partes que liga P_1 e P_2.

3. F é um campo conservativo.

4. $rot(F) = \vec{0}$.

Prova: $1 \Longrightarrow 2$. Sejam C_1 e C_2 curvas de classe C^1 por partes ligando P_1 e P_2:

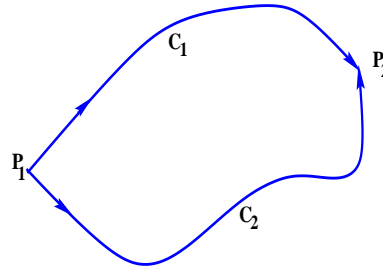



Figura 10.14:

Logo, $C = C_1^+ \cup C_2^-$ é uma curva fechada; pela hipótese:

$$0 = \oint_C F = \int_{C_1^+} F + \int_{C_2^-} F;$$

então, $\int_{C_1^+} F = -\int_{C_2^-} F$ e a integral independe do caminho escolhido.

$2 \Longrightarrow 3$. Definamos $F = (F_1, F_2, F_3)$ tal que:

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0)\, dt + \int_0^y F_2(x, t, 0)\, dt + \int_0^z F_3(x, y, t)\, dt.$$

A função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é bem definida, pois as integrais só dependem dos pontos finais. Calculando diretamente, obtemos: $\nabla f = F$; logo F é conservativo.

$3 \Longrightarrow 4$. Inmediata.

$4 \Longrightarrow 1$. Pelo teorema de Stokes:

$$\oint_{C=\partial S} F = \iint_S rot(F)\, dS = 0.$$

10.5 Teorema de Gauss

O teorema de Gauss, ou da divergência, relaciona a integral tripla sobre um sólido de $\mathbb{R}^3$ com a integral sobre a superfície formada pelo bordo do sólido. Intuitivamente, uma superfície é fechada e limitada se separa o espaço numa parte interna e outra externa, como por exemplo o elipsóide ou a esfera. Uma supefície fechada e limitada é bordo de um sólido no espaço.

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido tal que $\partial W = S$ seja uma superfície fechada e limitada. Por exemplo, se $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, então $\partial W = S^2$ é a esfera unitária.

Definição 10.2. ∂W é dito orientado positivamente se o vetor normal a ∂W aponta para fora de W.

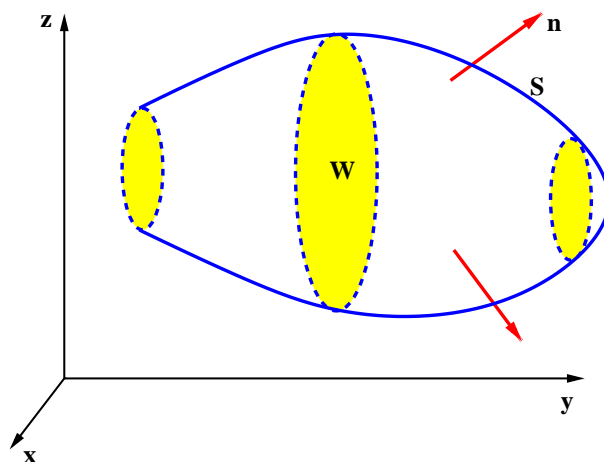



Figura 10.15:

Teorema 10.3. (Teorema de Gauss)
Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido tal que $\partial W = S$ é uma superfície fechada e limitada, orientada positivamente. Se F um campo de vetores de classe C^1 definido no conjunto aberto U tal que $W \subset U$, então:

$$\boxed{\iint_S F\,dS = \iiint_W div(F)\,dx\,dy\,dz}$$

Exemplo 10.3.

[1] Calcule $\iint_S F\,dS$, onde $F(x,y,z) = (4\,x, -2\,y^2, z^2)$ e S é a superfície limitada por $x^2 + y^2 = 4$ tal que $0 \leq z \leq 3$.

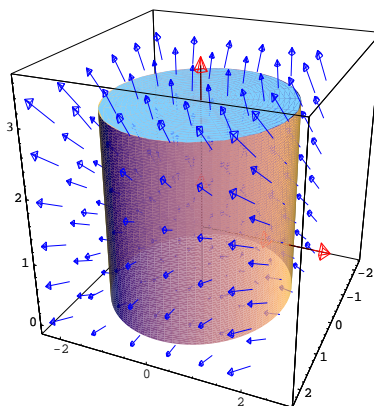



Figura 10.16: Exemplo [1]

Seja o sólido $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 3\}$ é o sólido limitado por um cilindro e fechado por dois planos paralelos; denotemos por $\partial W = S$. Aplicaremos o teorema de Gauss: $div(F)(x,y,z) = 4 - 4\,y + 2\,z$, logo:

$$\iint_S F\,dS = \iiint_W (4 - 4\,y + 2\,z)\,dx\,dy\,dz;$$

em coordenadas cilíndricas, obtemos: $div(F)(r,\theta,z) = 4 - 4\,r\,sen(\theta) + 2\,z$ com $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\,\pi$ e $0 \leq z \leq 3$; então:

$$\begin{aligned}\iint_S F\,dS &= \iiint_W (4 - 4\,y + 2\,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^2 (4 - 4\,r\,sen(\theta) + 2\,z)\,r\,dr\,dz\,d\theta \\ &= 84\,\pi.\end{aligned}$$

[2] Calule $\iint_S F\,dS$, onde $F(x,y,z) = (y\,z^2, x\,z^2, x^2+y^2)$ e S é a superfície definida por $z = x^2 + y^2$ tal que $0 \leq z \leq 1$.

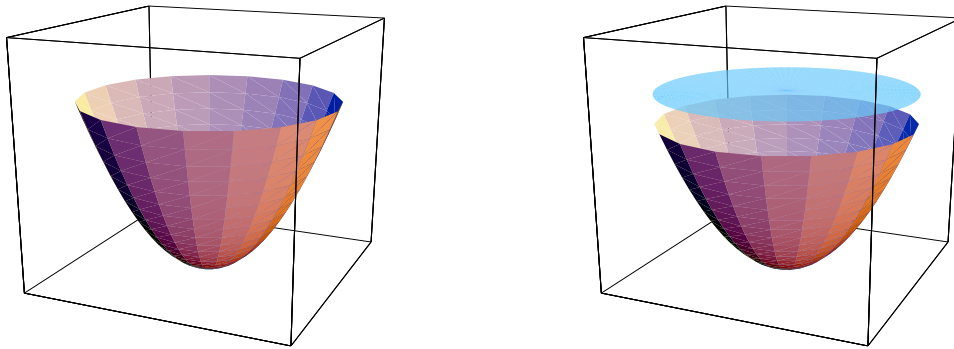



Figura 10.17: Exemplo [2].

Não podemos aplicar diretamente o teorema de Gauss, pois S não limita um sólido. Para aplicar o teorema de Gauss, "tamparemos"o parabolóide com um disco de raio 1.

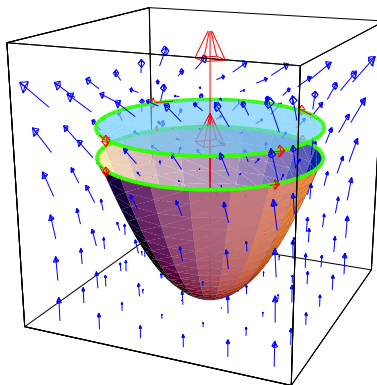



Figura 10.18:

Seja W o sólido com normal $(0,0,-1)$ tal que $\partial W = S \cup S_1$, onde S_1 e a superfície parametrizada por $\Phi_1(x,y) = (x,y,1)$ tal que $x^2+y^2 \leq 1$. Pelo teorema de Gauss:

$$\iiint_W div(F)\,dx\,dy\,dz = \iint_S F\,dS + \iint_{S_1} F\,dS_1.$$

Note que $div(F) = 0$; logo, $\displaystyle\iint_S F\,dS = -\iint_{S_1} F\,dS_1$ e:

$$\iint_{S_1} F\,dS_1 = -\iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta = -\frac{\pi}{2};$$

então,

$$\iint_S F\,dS = \frac{\pi}{2}.$$

[3] Verificaremos que o fluxo do campo de quadrado inverso através de qualquer superfície fechada e limitada, bordo de um sólido que contém a origem é $4\,k\,\pi$. Veja o capítulo 4.

Notemos que o campo de quadrado inverso F não é de classe C^1 em W, onde $S = \partial W$.

Seja B_ε uma bola aberta centrada na origem de raio $\varepsilon > 0$ contida em W, denotemos por $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. O campo F é de classe C^1 em $W_\varepsilon = W - B_\varepsilon$; aplicando o teorema da divergência, onde $\partial W_\varepsilon = S \cup S_\varepsilon$ e $div(F) = 0$:

$$0 = \iiint_W div(F)\,dx\,dy\,dz = \iint_S F\,dS + \iint_{S_\varepsilon} F\,dS_\varepsilon;$$

então,

$$\iint_S F\,dS = -\iint_{S_\varepsilon} F\,dS_\varepsilon.$$

O vetor normal a S_ε é $\vec{n} = -\dfrac{P(x,y,z)}{\|P(x,y,z)\|} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\,P(x,y,z)$, onde P é o vetor posição, logo:

$$\begin{aligned}\iint_S F\,dS = -\iint_{S_\varepsilon} F\,dS_\varepsilon &= \iint_{S_\varepsilon} \left[\frac{k\,P(x,y,z)}{\|P(x,y,z)\|^3}\right]\cdot\left[\frac{1}{\varepsilon}\,P(x,y,z)\right] dS_\varepsilon \\ &= \frac{k}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon} dS_\varepsilon = 4\,k\,\pi.\end{aligned}$$

Se $(0,0,0) \notin W$, então o campo de vetores de quadrado inverso F é de classe C^1 em W; como $div(F) = 0$, pelo teorema de Gauss:

$$\iint_S F\,dS = \iiint_W div(F)\,dx\,dy\,dz = 0.$$

10.6 Interpretação do Teorema de Gauss

Sejam F um campo de classe C^1 definido em $A \subset \mathbb{R}^3$, $P \in A$, para ε pequeno, denotamos por $B_\varepsilon = B_\varepsilon(P) = \{R \in A \,/\, \|R - P\| \leq \varepsilon\}$ e $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$. Suponha que F representa a velocidade de escoamento de um fluido no ponto $(x, y, z) \in A$. Logo,

$$\iint_{S_\varepsilon} F\, dS = \iiint_{B_\varepsilon} div(F)\, dx\, dy\, dz.$$

Pelo teorema do valor médio, existe $P_\varepsilon \in B_\varepsilon$ tal que:

$$\iiint_{B_\varepsilon} div(F)\, dx\, dy\, dz = div(\vec{F})(P_\varepsilon)\, vol(B_\varepsilon);$$

então:

$$div(\vec{F})(P_\varepsilon) = \frac{1}{vol(B_\varepsilon)} \iint_{S_\varepsilon} F\, dS.$$

Aplicando limite:

$$div(\vec{F})(P) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{vol(B_\varepsilon)} \oint_{\partial B_\varepsilon} \vec{F}.$$

$div(\vec{F})(P)$ é o valor limite do fluxo por unidade de volume sobre uma esfera de centro P. Se $div(\vec{F})(P) > 0$, então P é dito fonte pois o fluido "sai"de P e se $div(\vec{F})(P) < 0$, então P é dito poço, pois o fluido "entra"por P. (Veja a próxima aplicação).

10.7 Aplicação

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ região de tipo IV, como nas hipóteses do teorema de Gauss.

Consideremos $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega$, $H = H(t, \mathbf{x})$ e $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ tais que para cada t, H seja um campo de vetores de classe C^1 em Ω e ρ uma função com valores reais de classe C^1 em Ω. Dizemos que H e ρ possuem uma lei de conservação da massa quando:

$$(1) \qquad \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho\, dx\, dy\, dz = -\iint_{\partial\Omega} J,$$

para toda região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de tipo IV, onde $J = \rho\, H$. Se ρ é uma densidade de massa ou carga e H o campo de velocidade de um fluido, a definição expressa que a variação da massa total em Ω é igual a razão com que a massa flui para o interior de Ω. Note que:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz.$$

Se denotamos por $div(J)$ a divergência de J calculada para cada t fixo, pelo teorema de Gauss:

$$\iint_{\partial\Omega} J = \iiint_{\Omega} div(J);$$

logo, (1) é equivalente a:

$$\iiint_{\Omega} \left[div(J) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right] dx\, dy\, dz = 0$$

para toda região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; então, (1) é equivalente a:

$$(2) \qquad div(J) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

A equação (2) é chamada de continuidade. No caso em que a densidade seja constante; de (2) temos que $div(J) = 0$.

Seja $T = T(t, \mathbf{x})$ uma função de classe C^2 que representa a temperatura de um corpo no instante t; então $F = -\nabla T$ é o fluxo do calor. A densidade de energia, isto é, a energia por unidade de volume é $c\,\rho_0\,T$, onde c é uma constante chamada calor específico e ρ_0 a densidade de massa, que consideraremos constante. Definamos o campo de vetores:

$$J = \tau\, F,$$

onde τ é a constante de conductividade. O campo J é chamado fluxo de energia.

Afirmação: A energia se conserva, isto é, satisfaz (1) ou, equivalentemente (2).

De fato:

$$div(J) = div(-\tau\, \nabla T) = -\tau\, \Delta(T);$$

por outro lado:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\big(c\,\rho_0\,T\big) = c\,\rho_0\,\frac{\partial T}{\partial t}.$$

Logo (2) é equivalente a:

$$(3) \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma^2\, \Delta(T).$$

Onde $\sigma^2 = \frac{\tau}{c\,\rho_0}$ é a constante de difusividade térmica.

A equação (3) é chamada **equação do calor**, a qual determina completamente a evolução da condução do calor num sólido.

Se T é estacionária, isto é, não depende de t, então, temos a equação de Laplace:

$$\Delta(T) = 0.$$

10.8 Interpretação da Divergência

Da equção (2), temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div(J);$$

logo, a divergência é a taxa de variação da densidade do fluido num ponto.

Se $div(J) > 0$ num ponto, sua densidade diminui, ou seja, o fluido está se expandindo.

Se $div(J) < 0$ num ponto, sua densidade aumenta, ou seja, o fluido está se contraindo.

Se $div(J) = 0$ em todos os pontos, a densidade é constante, ou seja, o fluido permanece em equilíbrio.

10.9 Exercícios

Teorema de Stokes

1. Determine o campo de vetores $F(x,y,z)$ tal que $rot(F)(x,y,z) = (2,1,3)$. Determine a circulação de F ao longo do círculo de raio 1 no plano xy, centrado na origem, no sentido que preferir:

   (a) Calcule diretamente.

   (b) Calcule utilizando o teorema de Stokes.

2. Considere o cilindro $C = \{(x,y,z),\ x^2+y^2=2,\ 0<z<2\}$. Utilizando o teorema de Stokes calcule o fluxo do campo de vetores $F(x,y,z) = (x,y,-2\,z)$ através de C no sentido da normal exterior.

3. Calcule a circulação do campo de vetores $F(x,y,z) = (2\,y\,z, 0, x\,y)$ ao longo de ∂W onde $W = \{(x,y,z)\,/\,x^2+y^2-2\,z^2=0, 0\le z<1\}$, no sentido que preferir.

4. Utilize o teorema de Stokes para calcular:

$$\oint_C (z+y+e^{x^2})\,dx + (x-z+ln(1+y^2))\,dy + sen(2\,z)\,dz,$$

   onde C é parametrizada por $\gamma(t) = (cos(t), sen(t), sen(2\,t))$, $t\in[0,2\,\pi]$.

5. Calcule o fluxo do rotacional do campo $F(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)$ através da interseção de $x^2+y^2=1$ e $y+z=2$, com normal exterior.

6. Calcule:

   (a) $\displaystyle\oint_C x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, onde C é a curva de equações paramétricas: $x = a\,sen(t)$, $y = a\,cos(t)$, $z = a\,\big(sen(t)+cos(t)\big)$, $0\le t\le 2\,\pi$.

   (b) $\displaystyle\oint_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, onde C é o contorno do triângulo de vértices $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ e $(0,0,a)$.

   (c) $\displaystyle\oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, onde C é a curva de interseção do cilindro circular $x^2+y^2=1$ com o plano $x+z=1$.

(d) $\displaystyle\iint_S rot(F)\,dS$, onde S é a porção do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ intersectada pelo plano xy.

7. Sejam P, Q e R funções de classe C^1 definidas num aberto de $\mathbb{R}^3$. Em que caso:

$$\oint_C P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = 0,$$

para toda curva fechada C?

8. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = \sqrt{x^2 + y^2};\ 1 \le z \le 3\}$. Calcule:

$$\iint_S rot(F)\,dS,$$

onde $F(x,y,z) = (y\,z, -x\,z, z^3)$.

9. Seja W o sólido limitado pelos parabolóides $z = x^2 + 2\,y^2$ e $z = 12 - 2\,x^2 - y^2$. Se $F(x,y,z) = (x,y,z)$, calcule o fluxo para fora do campo F através da fronteira de W.

Teorema de Gauss

1. Seja W o sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $z = 3$. Calcule o fluxo de F através da superfície $S = \partial W$, com campo de vetores normais exterior a S, se:

(a) $F(x,y,z) = (x,y,z)$

(b) $F(x,y,z) = (-y,x,0)$

(c) $F(x,y,z) = (x^2,0,z)$

(d) $F(x,y,z) = (y^2,x,z\,x)$

2. Suponha que $\partial W = S$ nas hipóteses do teorema de Gauss e que f é uma função de classe C^2, harmônica sobre W. Verifique que:

$$\iint_S \big(f\,grad(f)\big)\,dS = \iiint_W \|grad(f)\|^2\,dx\,dy\,dz.$$

3.] Calcule o fluxo do campo de vetores:

$$F(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\,\big(x,y,z\big)$$

através da superfície do sólido W limitado pelas esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, orientadas com sentidos opostos.

4. Calcule o fluxo do campo de vetores $F(x,y,z) = (2\,x, -1, z)$ através da superfície do tetraedro determinado pelo plano $2\,x + y + 3\,z = 6$ e pelos planos coordenados.

5. Calcule:

$$\iint_S F\,dS,$$

   onde $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$ e S é o bordo do cubo Q definido por $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$.

6. Calcule o fluxo de $F(x,y,z) = (2\,x\,y + z, y^2, -x - 3\,z)$ através da superfície do sólido W limitado pelos planos coordenados e por $2 \, + 2\,y + z = 3$.

7. Se $F(x,y,z) = (x,y,z)$, verifique que o fluxo de F através da superfície S de um sólido qualquer W é o triplo do volume de W.

8. Calcule:

$$\iint_S F(x,y,z)\,dS,$$

   onde $F(x,y,z) = (2\,x, y, 2\,z)$ e S é a fronteira da região limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$ e $z = 2$.

9. Seja $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$:

   (a) Verifique que f é harmônica em $\mathbb{R}^3$, exceto na origem.

   (b) Calcule $\displaystyle\iint_S grad(f)\,dS$, onde S é a esfera de raio 1 centrada na origem.

Capítulo 11

COMPLEMENTOS DE CAMPOS DE VETORES

Neste capítulo aprofundaremos alguns dos conceitos e teoremas já estudados nos capítulos anteriores, com acréscimos importantes nas aplicações. Para uma melhor compreensão dos tópicos que trataremos, recomendamos conhecimentos básicos de Álgebra Linear.

11.1 Introdução

Neste parágrafo apresentaremos os conceitos mais utilizados nos capítulos anteriores, do ponto de vista da Álgebra Vetorial. Todos estes resultados são, essencialmente, exercícios de derivadas e da regra da cadeia. Para detalhes, veja **[VC]**.

Considere ∇ o operador definido nos capítulos anteriores, em coordenadas retangulares:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{\mathbf{k}},$$

onde $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$. De forma análoga, define-se para o $\mathbb{R}^2$.

Dos capítulos anteriores, sabemos que o operador ∇ possui uma um caráter tanto vetorial como diferencial, isto é, o operador atua sobre campos de vetores e funções diferenciáveis. No que segue do capítulo, todas as funções e campos de vetores serão definidos num conjunto aberto do $\mathbb{R}^3$ ou do $\mathbb{R}^2$ e pelo menos devem possuir as primeira derivadas parciais, definidas no conjunto aberto. Então, temos:

$$\nabla f = grad(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$\nabla \cdot F = div\, F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

e:

$$\begin{aligned}\nabla \times F = rot\, F &= \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right]\vec{\mathbf{i}} + \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right]\vec{\mathbf{j}} + \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right]\vec{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

O operador ∇ é linear; de fato, sejam f e g funções, F e G campos de vetores e α e β constantes, então:

$$\begin{aligned}&\nabla\,(\alpha\, f + \beta\, g) = \alpha\,\nabla\, f + \beta\,\nabla\, g,\\ &\nabla \cdot (\alpha\, F + \beta\, G) = \alpha\,\nabla \cdot F + \beta\,\nabla \cdot G \quad \text{e}\\ &\nabla \times (\alpha\, F + \beta\, G) = \alpha\,\nabla \times F + \beta\,\nabla \times G.\end{aligned}$$

Segue diretamente das definições:

Proposição 11.1. Sejam f uma função real, F e G campos de vetores definidos no aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, então:

1. $\nabla\,\big(f\, g\big) = g\,\nabla\, f + f\,\nabla g.$

2. $\nabla \cdot\, (f\, F) = f\,\nabla \cdot F + \nabla\, f \cdot F.$

3. $\nabla \times (f\, F) = f\,\nabla \times F + \nabla\, f \times F = f\,\nabla \times F - F \times \nabla\, f.$

4. $\nabla \cdot \big(F \times G\big) = \big(\nabla \times F\big) \cdot G - \big(\nabla \cdot G\big) \cdot F.$

As provas destas identidades são essencialmente execícios de derivadas. De fato, vejamos a identidade 2.:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(f\,F) &= \frac{\partial}{\partial x}\big[f\,F_1\big]+\frac{\partial}{\partial y}\big[f\,F_2\big]+\frac{\partial}{\partial z}\big[f\,F_3\big]\\ &= f\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right]+F_1\frac{\partial f}{\partial x}+F_2\frac{\partial f}{\partial y}+F_3\frac{\partial f}{\partial z}\\ &= f\,\nabla\cdot F+\nabla f\cdot F\end{aligned}$$

A identidade 3:

$$\nabla\times(f\,F)=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f\,F_1 & f\,F_2 & f\,F_3\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial(f\,F_3)}{\partial y}-\frac{\partial(f\,F_2)}{\partial z}\right]\vec{\mathbf{i}}+\left[\frac{\partial(f\,F_1)}{\partial z}-\frac{\partial(f\,F_3)}{\partial x}\right]\vec{\mathbf{j}}+\left[\frac{\partial(f\,F_2)}{\partial x}-\frac{\partial(f\,F_1)}{\partial y}\right]\vec{\mathbf{k}}$$

$$=f\left[\left[\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right]\vec{\mathbf{i}}+\left[\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right]\vec{\mathbf{j}}+\left[\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right]\vec{\mathbf{k}}\right]+$$

$$+\left[F_3\frac{\partial f}{\partial y}-F_2\frac{\partial f}{\partial z}\right]\vec{\mathbf{i}}+\left[F_1\frac{\partial f}{\partial z}-F_3\frac{\partial f}{\partial x}\right]\vec{\mathbf{j}}+\left[F_2\frac{\partial f}{\partial x}-F_1\frac{\partial f}{\partial y}\right]\vec{\mathbf{k}}$$

$$=f\,\nabla\times F+\nabla f\times F.$$

De forma análoga, definamos o seguinte operador linear que possui características semelhantes às do anterior.

O operador de Laplace ou laplaciano, denotado e definido por:

$$\Delta=\nabla^2=\nabla\cdot\nabla.$$

Seja f uma função de classe C^2, definida no aberto $U\subset\mathbb{R}^3$; então, em coordenadas retangulares:

$$\Delta\,f=\nabla^2\,f=\nabla\cdot\nabla\,f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

isto é: $\Delta f=div\,grad(f)$. Análogamente para $n=2$.

Proposição 11.2. Sejam fe g funções de classe C^2 definidas num aberto $U\subset\mathbb{R}^n$, então:

1. $\nabla \cdot (f \nabla g) = f\,\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g$.

2. $\nabla \cdot (g \nabla f) = g\,\Delta f + \nabla g \cdot \nabla f$.

3. $\Delta\big(f\,g\big) = f\,\Delta\,g + g\,\Delta\,f + 2\,\nabla f \cdot \nabla g$. Em particular

$$\Delta\big(f^2\big) = 2\,f\,\Delta\,f + 2\,\|\nabla f\|^2.$$

O operador de Laplace é fundamental na Teoría do Potencial. A equação diferencial parcial:

$$\Delta f = h,$$

é chamada equação de Poisson, e no caso em que $h = 0$ é dita equação de Laplace; as soluções da equação de Laplace são chamadas funções harmônicas. A equação de Poisson e a equação de Laplace possuem soluções únicas, dependendo das condições de contorno.

Exemplo 11.1.

[1] A função $f(x, y, z) = a\,x + b\,y + c\,z$ é claramente harmônica.

[2] A função $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ é harmônica. De fato:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right] = \frac{2\,x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right] = \frac{-x^2 + 2\,y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right] = \frac{-x^2 - y^2 + 2\,z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}};$$

logo, $\Delta\,f(x, y, z) = 0$.

Seja $F = (F_1, F_2, F_3)$ um campo de vetores de classe C^2; então, denotamos e definimos:

$$\Delta F = \Delta F_1\,\vec{\mathbf{i}} + \Delta F_2\,\vec{\mathbf{j}} + \Delta F_3\,\vec{\mathbf{k}}.$$

Exemplo 11.2.

[1] Considere o vetor posição $F(x,y,z) = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$.

Claramente $\Delta\, F(x,y,z) = 0$.

[2] Considere o campo de vetores $F(x,y,z) = x^2\,y^2\,\vec{\mathbf{i}} + y^2\,z^2\,\vec{\mathbf{j}} + x^2\,z^2\,\vec{\mathbf{k}}$. Determine $\Delta\, F$.

$$\Delta\, F_1 = 2\,(x^2 + y^2), \quad \Delta\, F_2 = 2\,(y^2 + z^2) \quad \text{e} \quad \Delta\, F_3 = 2\,(x^2 + z^2);$$

logo:

$$\Delta\, F(x,y,z) = 2\,(x^2 + y^2)\,\vec{\mathbf{i}} + 2\,(y^2 + z^2)\,\vec{\mathbf{j}} + 2\,(x^2 + z^2)\,\vec{\mathbf{k}}.$$

Proposição 11.3. Sejam fe g funções reais, F e G campos de vetores de classe C^2 definidos no aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, então:

1. $\nabla \cdot (f\,\nabla\, g - g\,\nabla\, f) = f\,\Delta g - g\,\Delta f$.

2. $\nabla \times \big(\nabla \times F\big) = \nabla\big(\nabla \cdot F\big) - \Delta\, F$.

11.2 Aplicações

A seguir apresentamos duas aplicações relevantes da teoría, as chamadas identidades de Green e as clássicas equações de Maxwell

11.3 Identidades de Green

Como primeira aplicação, apresentaremos as chamadas **Identidades de Green**. Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ uma regão tal que $\partial W = S$ nas hipóteses do teorema de Gauss. Sejam f e g funções de classe C^2 e $\vec{\mathbf{n}}$ o vetor normal exterior a W, então

1. **Primeira Identidade de Green**:

$$\iint_S f\,\nabla\, g \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_W (f\,\Delta g + \nabla\, f \cdot \nabla\, g)\, dx\, dy\, dz.$$

2. **Segunda Identidade de Green**:

$$\iint_S (f\,\nabla\, g - g\,\nabla\, f) \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_W (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\, dx\, dy\, dz.$$

De fato, a primeira identidade de Green sai de 1. da proposição 11.2. De fato:

$$\iiint_W \nabla \cdot (f \nabla g)\, dx\, dy\, dz = \iiint_W (f\, \Delta g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dx\, dy\, dz,$$

aplicando o teorema de Gauss:

$$\iiint_W \nabla \cdot (f \nabla g)\, dx\, dy\, dz = \iint_S (f \nabla g) \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS.$$

Subtraido 1. de 2. da proposição 11.2 e aplicando o teorema de Gauss, obtemos a segunda identidade de Green.

11.4 As Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são um sistema de equações que descrevem todos os fenômenos eletromagnéticos clássicos (não quânticos) e suas interações com a matéria:

$\nabla \cdot D = \rho_v$	Lei de Gauss
$\nabla \cdot B = 0$	Lei de Gauss para o magnetismo
$\nabla \times E = -\dfrac{\partial B}{\partial t}$	Lei de indução de Faraday
$\nabla \times H = J + \dfrac{\partial D}{\partial t}$	Lei de Ampère - Maxwell,

onde:

ρ_v é a densidade volumétrica de carga elétrica (unidade SI: coulomb por metro cúbico), não incluindo dipolos de cargas ligadas no material.

B é a densidade superficial de fluxo magnético (unidade SI: tesla), também chamada de indução magnética.

D é o campo elétrico de deslocamento ou densidade superficial de campo elétrico (unidade SI: coulomb por metro quadrado).

E é a intensidade de campo elétrico (unidade SI: volt por metro).

H é a intensidade de campo magnético (unidade SI: ampère por metro)

J é a densidade superficial de corrente elétrica (unidade SI: ampère por metro quadrado)

Como o vácuo é um meio linear, homogêneo e isotrópico (desprezando pequenas não-linearidades devido a efeitos quânticos). Caso não haja presença de correntes ou cargas elétricas, obtêm-se as equações de Maxwell no vácuo:

$$\begin{array}{ll} (1) & \nabla \cdot B = 0 \\ (2) & \nabla \cdot E = 0 \\ (3) & \nabla \times B = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} \\ (4) & \nabla \times E = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial B}{\partial t}, \end{array}$$

onde E é o campo elétrico, B é o campo magnético e c a velocidade da luz no vácuo (em cgs). De (4) temos:

$$(5) \qquad \nabla \times \big(\nabla \times E\big) = -\frac{1}{c}\,\nabla \times \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Derivando (3) em relação a t:

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\,\nabla \times B = \frac{1}{c}\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Por outro lado, temos (exercício) que o operador ∇ e a derivada em relação a t, comutam:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla \times B = \nabla \times \frac{\partial B}{\partial t}.$$

De (5), (6) e identidade 2, da proposição 11.3, temos:

$$\Delta\, E = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Esta é a equação da onda para o campo elétrico. Veja **[VM]**.

11.5 Mudanças de Coordenadas

Como estudamos nos capítulos anteriores, a utilização das coordenadas cartesianas nem sempre são as mais adequadas para descrever algumas situações geométricas. Muitas vezes os fenômenos estudados apresentam, por exemplo, simetrias, as quais não são claras em coordenadas cartesianas. Neste parágrafo apresentaremos sistemas de coordenadas mais gerais que os estudados anteriormente. Também apresentaremos as respectivas mudanças de base no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. As mudanças para $\mathbb{R}^2$ ficam para exercício. O linguagem e os conceitos que utilizaremos neste parágrafo são da Álgebra Linear básica.

Em geral, dadas uma mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x &= x(u,v,w) \\ y &= y(u,v,w) \\ z &= z(u,v,w), \end{cases} \tag{11.1}$$

tal que a matriz jacobiana é não singular, localmente, podemos resolver o sistema (11.1) de forma única para u, v e w em função de de x, y e z, isto é:

$$\begin{cases} u &= u(x,y,z) \\ v &= v(x,y,z) \\ w &= w(x,y,z). \end{cases}$$

Logo, a cada ponto (x,y,z) corresponde um único (u,v,w) e vice-versa.

11.6 Bases

Se fazemos v e w constantes , então o sistema (11.1) representa a equação paramétrica de uma curva coordenada. De forma análoga, fazendo constantes as outras variáveis do sistema (11.1), obtemos 3 curvas coordenadas. Note que estas curvas são regulares.

O sistema de coordenadas induzido pelas curvas coordenadas formam um sistema com uma nova base ortonormal $\{\vec{\mathbf{e_u}},\, \vec{\mathbf{e_v}},\, \vec{\mathbf{e_w}}\}$, onde os vetores da base são os vetores tangentes unitários ás curvas coordenadas.

De fato, seja $\{\vec{\mathbf{i}},\, \vec{\mathbf{j}},\, \vec{\mathbf{k}}\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e denotemos o vetor posição por:

$$R(u,v,w) = x(u,v,w)\,\vec{\mathbf{i}} + y(u,v,w)\,\vec{\mathbf{j}} + z(u,v,w)\,\vec{\mathbf{k}},$$

então a base $\{\vec{\mathbf{e_u}},\, \vec{\mathbf{e_v}},\, \vec{\mathbf{e_w}}\}$ é dada por:

$$\vec{\mathbf{e_u}} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial R}{\partial u}, \quad \vec{\mathbf{e_v}} = \frac{1}{h_v}\frac{\partial R}{\partial v} \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{e_w}} = \frac{1}{h_w}\frac{\partial R}{\partial w};$$

onde:

$$h_u = \left|\frac{\partial R}{\partial u}\right|, \quad h_v = \left|\frac{\partial R}{\partial v}\right| \quad \text{e} \quad h_w = \left|\frac{\partial R}{\partial w}\right|.$$

As quantidades h_u, h_v e h_w são ditas fator de escala da base $\{\vec{\mathbf{e_u}},\, \vec{\mathbf{e_v}},\, \vec{\mathbf{e_w}}\}$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$. Não é difícil ver que $\{\vec{\mathbf{e_u}},\, \vec{\mathbf{e_v}},\, \vec{\mathbf{e_w}}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Observação 11.1. A análise anterior ainda continua válida se em vez de aplicada à descrição de $\mathbb{R}^3$ a utilizamos para introduzir um sistema de coordenadas numa superfície. Veja o exemplo [2].

Exemplo 11.3.

[1] **Coordenadas cartesianas**. No caso em que a base é $\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\}$, temos:

$$R(x, y, z) = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}},$$

onde $h_x = h_y = h_w = 1$, $\vec{\mathbf{e_x}} = \vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{e_y}} = \vec{\mathbf{j}}$ e $\vec{\mathbf{e_z}} = \vec{\mathbf{k}}$.

[2] **Coordenadas toroidais**. Considere a parametrização do toro:

$$\begin{cases} u(r, \theta, \phi) &= (a + r\,sen(\phi))\,cos(\theta) \\ v(r, \theta, \phi) &= (a + r\,sen(\phi))\,sen(\theta) \\ w(r, \theta, \phi) &= r\,cos(\phi), \end{cases}$$

onde $0 \le r \le a$, $0 \le \theta < 2\,\pi$ e $0 \le \phi \le \pi$. Logo, temos:

$$R(r, \theta, \phi) = \big[a + r\,sen(\phi)\big]\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + \big[a + r\,sen(\phi)\big]\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{j}} + r\,cos(\phi)\,\vec{\mathbf{k}}.$$

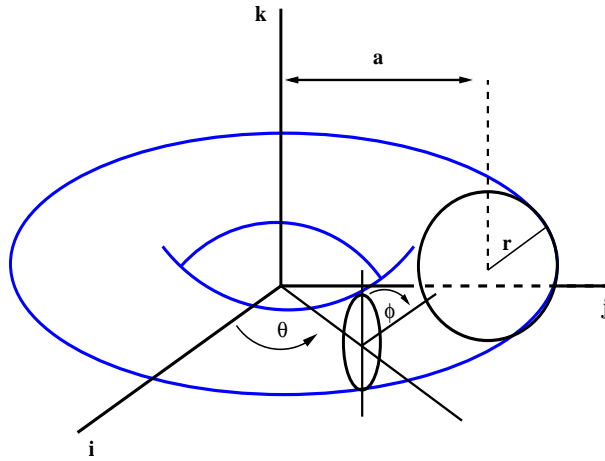



Figura 11.1: Coordenadas no toro

Logo:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = sen(\phi)\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + sen(\phi)\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{j}} + cos(\phi)\,\vec{\mathbf{k}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = -(a + r\,sen(\phi))\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + (a + r\,sen(\phi))\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{j}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial \phi} = r\,cos(\phi)\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + r\,cos(\phi)\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{j}} - r\,sen(\phi)\,\vec{\mathbf{k}}.$$

Então, $h_r = 1$, $h_\theta = a + r\,sen(\phi)$ e $h_\phi = r$ e a base do sistema é:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{e_r}} &= sen(\phi)\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + sen(\phi)\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{j}} + cos(\phi)\,\vec{\mathbf{k}},\\
\vec{\mathbf{e_\theta}} &= -sen(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + cos(\theta)\,\vec{\mathbf{j}},\\
\vec{\mathbf{e_\phi}} &= cos(\phi)\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + cos(\phi)\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{j}} - sen(\phi)\,\vec{\mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e_r}}\\ \vec{\mathbf{e_\theta}}\\ \vec{\mathbf{e_\phi}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta)\,sen(\phi) & sen(\theta)\,sen(\phi) & cos(\phi)\\ -sen(\theta) & cos(\theta) & 0\\ cos(\theta)\,cos(\phi) & sen(\theta)\,cos(\phi) & -sen(\phi)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\vec{\mathbf{i}}\\ \vec{\mathbf{j}}\\ \vec{\mathbf{k}}\end{bmatrix}.$$

A transformação inversa é:

$$\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{i}}\\ \vec{\mathbf{j}}\\ \vec{\mathbf{k}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta)\,sen(\phi) & -sen(\theta) & cos(\theta)\,cos(\phi)\\ sen(\theta)\,sen(\phi) & cos(\theta) & sen(\theta)\,cos(\phi)\\ cos(\phi) & 0 & -sen(\phi)\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\vec{\mathbf{e_r}}\\ \vec{\mathbf{e_\theta}}\\ \vec{\mathbf{e_\phi}}\end{bmatrix}.$$

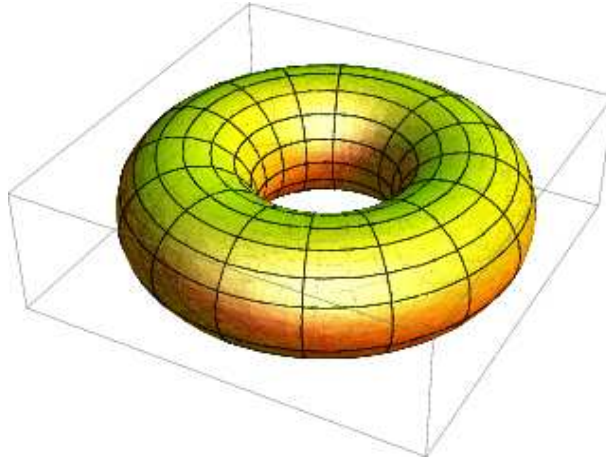



Figura 11.2: O toro com seu sistema de coordenadas

11.7 Operador Nabla numa Base Arbitrária

Os operadores definidos anteriormente dependem do sistema de coordenadas escolhido. De fato, na base ortonormal $\{\vec{\mathbf{e_u}},\, \vec{\mathbf{e_v}},\, \vec{\mathbf{e_w}}\}$, temos:

11.7.1 Gradiente

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\,\vec{\mathbf{e_u}} + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\,\vec{\mathbf{e_v}} + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\,\vec{\mathbf{e_w}}$$

11.7.2 Laplaciano

$$\Delta f = \frac{1}{h_u\,h_v\,h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{h_v\,h_w}{h_u}\,\frac{\partial f}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{h_u\,h_w}{h_v}\,\frac{\partial f}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{h_u\,h_v}{h_w}\,\frac{\partial f}{\partial w}\right]\right].$$

Seja $F = (F_u, F_v, F_w)$, onde $F_u = F_1(u,v,w)$, $F_v = F_2(u,v,w)$ e $F_w = F_3(u,v,w)$ tal que $F = (F_1, F_2, F_3)$, isto é, um campo de vetores na base $\{\vec{\mathbf{e_u}},\ \vec{\mathbf{e_v}},\ \vec{\mathbf{e_w}}\}$

11.7.3 Divergência

$$\nabla\cdot F = \frac{1}{h_u\,h_v\,h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\big[h_v\,h_w\,F_u\big] + \frac{\partial}{\partial v}\big[h_u\,h_w\,F_v\big] + \frac{\partial}{\partial w}\big[h_u\,h_v\,F_w\big]\right]$$

11.7.4 Rotacional

$$\nabla\times F = \frac{1}{h_u\,h_v\,h_w}\begin{vmatrix} h_u\,\vec{\mathbf{e_u}} & h_v\,\vec{\mathbf{e_v}} & h_w\,\vec{\mathbf{e_w}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u\,F_u & h_v\,F_v & h_w\,F_w \end{vmatrix} = A(u,v,w)\,\vec{\mathbf{e_u}} + B(u,v,w)\,\vec{\mathbf{e_v}} + C(u,v,w)\,\vec{\mathbf{e_w}}.$$

onde:

$$\begin{aligned} A(u,v,w) &= \frac{1}{h_v\,h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}\big[h_w\,F_w\big] - \frac{\partial}{\partial w}\big[h_v\,F_v\big]\right], \\ B(u,v,w) &= \frac{1}{h_u\,h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}\big[h_u\,F_u\big] - \frac{\partial}{\partial u}\big[h_w\,F_w\big]\right], \\ C(u,v,w) &= \frac{1}{h_u\,h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\big[h_v\,F_v\big] - \frac{\partial}{\partial v}\big[h_u\,F_u\big]\right]. \end{aligned}$$

Observação 11.2. Estes operadores são invariantes por mudanças de coordenadas, isto é, em que o resultado ao aplicar o operador, em qualquer tipo de coordenadas, sempre é o mesmo. Por exemplo, um campo de vetores irrotacional em coordenadas retangulares, continua irrotacional em qualquer sistema de coordenadas.

Exemplo 11.4.

[1] **Coordenadas cilíndricas parabólicas**. Considere a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} x(u,v,z) &= \dfrac{u^2-v^2}{2} \\ y(u,v,z) &= u\,v \\ z(u,v,z) &= z, \end{cases}$$

onde $u,\ v,\ z \in \mathbb{R}$. Determine:

(a) A nova base.

(b) O gradiente, o laplaciano, a divergência e o rotacional neste sistema de coordenadas.

(c) Seja $F(u,v,z) = v\,\vec{\mathbf{e_u}} + u\,\vec{\mathbf{e_v}} + v\,\vec{\mathbf{e_z}}$. Determine a divergência e o rotacional de F.

(a) Note que $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,z)}\right| = u^2+v^2 \neq 0$ se u ou v são não nulos. Consideremos:

$$R(u,v,z) = \left[\frac{u^2-v^2}{2}\right]\vec{\mathbf{i}} + u\,v\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}},$$

logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial u} &= u\,\vec{\mathbf{i}} + v\,\vec{\mathbf{j}} \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= -v\,\vec{\mathbf{i}} + u\,\vec{\mathbf{j}} \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= \vec{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que $h_u = h_v = \sqrt{u^2+v^2}$ e $h_z = 1$. Logo, obtemos uma nova base ortonormal $\{\vec{\mathbf{e_u}}, \vec{\mathbf{e_v}}, \vec{\mathbf{e_z}}\}$ definida por:

$$\vec{\mathbf{e_u}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[u\,\vec{\mathbf{i}} + v\,\vec{\mathbf{j}}\right], \quad \vec{\mathbf{e_v}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[-v\,\vec{\mathbf{i}} + u\,\vec{\mathbf{j}}\right] \quad \text{e} \quad \vec{\mathbf{e_w}} = \vec{\mathbf{k}}.$$

Equivalentemente:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e_u}} \\ \vec{\mathbf{e_v}} \\ \vec{\mathbf{e_z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v & 0 \\ -v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{bmatrix}.$$

A transformação inversa é:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_u} \begin{bmatrix} u & -v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e_u}} \\ \vec{\mathbf{e_v}} \\ \vec{\mathbf{e_z}} \end{bmatrix}.$$

(b) Logo na nova base, temos:

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{\partial f}{\partial u} \vec{\mathbf{e_u}} + \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{\partial f}{\partial v} \vec{\mathbf{e_v}} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{\mathbf{k}}$$

$$\Delta f = \frac{1}{u^2+v^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F &= \frac{1}{u^2+v^2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \big[\sqrt{u^2+v^2}\, F_u \big] + \frac{\partial}{\partial v} \big[\sqrt{u^2+v^2}\, F_v \big] + \frac{\partial}{\partial z} \big[(u^2+v^2)\, F_z \big] \right] \\ &= \frac{1}{(u^2+v^2)^{3/2}} \left[u\, F_u + v\, F_v + (u^2+v^2) \left[\frac{\partial F_u}{\partial u} + \frac{\partial F_v}{\partial v} \right] \right] + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \frac{1}{u^2+v^2} \begin{vmatrix} \sqrt{u^2+v^2}\, \vec{\mathbf{e_u}} & \sqrt{u^2+v^2}\, \vec{\mathbf{e_v}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{u^2+v^2}\, F_u & \sqrt{u^2+v^2}\, F_v & F_z \end{vmatrix} \\ &= A(u,v,z)\, \vec{\mathbf{e_u}} + B(u,v,z)\, \vec{\mathbf{e_v}} + C(u,v,z)\, \vec{\mathbf{e_z}}. \end{aligned}$$

onde:

$$A(u,v,z) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{\partial F_z}{\partial v} - \frac{\partial F_v}{\partial z},$$

$$B(u,v,z) = \frac{\partial F_u}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \frac{\partial F_z}{\partial u},$$

$$C(u,v,z) = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}} \left[\frac{1}{u^2+v^2} \big[u\, F_v - v\, F_u \big] + \big[\frac{\partial F_v}{\partial u} - \frac{\partial F_u}{\partial v} \big] \right].$$

(c) Como $F_u = v$, $F_v = u$ e $F_z = v$, temos:

$$\nabla \cdot F = \frac{2\,u\,v}{(u^2+v^2)^{3/2}}$$

$$\nabla \times F = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{vmatrix} \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{\mathbf{e_u}} & \sqrt{u^2+v^2}\,\vec{\mathbf{e_v}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \\ v\,\sqrt{u^2+v^2} & u\,\sqrt{u^2+v^2} & v \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\vec{\mathbf{e_u}} + \frac{u^2-v^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}\,\vec{\mathbf{e_z}}.$$

[2] Determine o gradiente, o laplaciano, e a divergência em coordenadas toroidais. Lembremos que $h_r = 1$, $h_\theta = a + r\,sen(\phi)$ e $h_\phi = r$ e a base do sistema é:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{e_r}} &= sen(\phi)\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + sen(\phi)\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{j}} + cos(\phi)\,\vec{\mathbf{k}}, \\ \vec{\mathbf{e_\theta}} &= -sen(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + cos(\theta)\,\vec{\mathbf{j}}, \\ \vec{\mathbf{e_\phi}} &= cos(\phi)\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + cos(\phi)\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{j}} - sen(\phi)\,\vec{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{\mathbf{e_r}} + \frac{1}{h_\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{\mathbf{e_\theta}} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{\mathbf{e_\phi}},$$

$$\Delta f = \frac{1}{r\,h_\theta}\left[(R + 2\,r\,sen(\phi))\,\frac{\partial f}{\partial r} + r\,h_\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{r}{h_\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + cos(\phi)\,\frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{h_\theta}{r}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right].$$

Denotemos por $F = (F_r, F_\theta, F_\phi)$, então:

$$\nabla \cdot F = \frac{(2\,r\,sen(\phi) + a)\,F_r}{r\,h_\theta} + \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{r}{h_\theta}\,\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + r\,cos(\phi)\,F_\phi + h_\theta\,\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}.$$

11.8 Operador Nabla em Coordenadas Cilíndricas

Considere a mudança de coordenadas cilíndricas. Se $P = (x, y, z)$ é um ponto no espaço xyz, suas coordenadas cilíndricas são (r, θ, z), onde (r, θ) são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e são definidas por:

$$\begin{cases} x = & r\,cos(\theta), \\ y = & r\,sen(\theta), \\ z = & z, \end{cases}$$

ou, explicitamante $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = z$ e:

$$\theta = \begin{cases} arctg(\frac{y}{x}) & \text{se} \quad x,\, y > 0, \\ \pi + arctg(\frac{y}{x}) & \text{se} \quad x < 0, \\ 2\pi + arctg(\frac{y}{x}) & \text{se} \quad x > 0,\, y < 0. \end{cases}$$

Se $x = 0$, então $\theta = \frac{\pi}{2}$ quando $y > 0$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ quando $y < 0$. Se $x = y = 0$, θ não é definido. Esta transformação é injetiva no seguinte subconjunto:

$$\{(r, \theta, z)/r > 0,\, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi,\, z \in (-\infty, +\infty)\}$$

Utilizando as coordenandas cilíndricas $\{r,\, \theta,\, z\}$ obtemos que o vetor posição em $\mathbb{R}^3$ é dado por:

$$R(r, \theta, z) = r\, cos(\theta)\, \vec{\mathbf{i}} + r\, sen(\theta)\, \vec{\mathbf{j}} + z\, \vec{\mathbf{k}},$$

logo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial r} &= cos(\theta)\, \vec{\mathbf{i}} + sen(\theta)\, \vec{\mathbf{j}} \\ \frac{\partial R}{\partial \theta} &= -r\, sen(\theta)\, \vec{\mathbf{i}} + r\, cos(\theta)\, \vec{\mathbf{j}} \\ \frac{\partial R}{\partial z} &= \vec{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que $h_r = h_z = 1$ e $h_\theta = r$; logo, obtemos uma nova base ortonormal $\{\vec{\mathbf{e_r}}, \vec{\mathbf{e_\theta}}, \vec{\mathbf{e_z}}\}$ definida por:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{e_r}} &= cos(\theta)\, \vec{\mathbf{i}} + sen(\theta)\, \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{e_\theta}} &= -sen(\theta)\, \vec{\mathbf{i}} + cos(\theta)\, \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{e_z}} &= \vec{\mathbf{k}}. \end{cases}$$

Equivalentemente:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e_r}} \\ \vec{\mathbf{e_\theta}} \\ \vec{\mathbf{e_z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{bmatrix}.$$

A transformação inversa é:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e_r}} \\ \vec{\mathbf{e_\theta}} \\ \vec{\mathbf{e_z}} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 11.5.

[1] Escreva em coordenadas cilíndricas o vetor posição.

O vetor posição em coordenadas retangulares é $F(x, y, z) = x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$; utilizando a mudança coordenadas cilíndricas, temos:

$$F(r, \theta, z) = r\,cos(\theta)\,\big[cos(\theta)\,\vec{\mathbf{a_r}} - sen(\theta)\,\vec{\mathbf{a_\theta}}\big] + r\,sen(\theta)\,\big[sen(\theta)\,\vec{\mathbf{a_r}} + cos(\theta)\,\vec{\mathbf{a_\theta}}\big] + z\,\vec{\mathbf{k}} = r\,\vec{\mathbf{a_r}} + z\,\vec{\mathbf{k}}.$$

[2] Seja o campo de vetores $F(r, \theta, z) = \dfrac{1}{r}\,\vec{\mathbf{a_r}}$. Escreva F em coordenadas retangulares.

Da mudança de coordenadas cilíndricas, temos:

$cos(\theta) = \dfrac{x}{r}$, $sen(\theta) = \dfrac{y}{r}$, $r^2 = x^2 + y^2$ e $\vec{\mathbf{a_r}} = cos(\theta)\,\vec{\mathbf{i}} + sen(\theta)\,\vec{\mathbf{j}}$, então:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r}\,\vec{\mathbf{a_r}} = \frac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{y}{x^2 + y^2}\,\vec{\mathbf{j}}.$$

[3] Seja $F(x, y, z) = y\,\vec{\mathbf{i}} + x\,\vec{\mathbf{j}} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{\mathbf{k}}$. Escreva F em coordenadas cilíndricas

Utilizando a mudança de coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{aligned} F(r, \theta, z) &= r\,sen(\theta)\,\big[cos(\theta)\,\vec{\mathbf{a_r}} - sen(\theta)\,\vec{\mathbf{a_\theta}}\big] + r\,cos(\theta)\,\big[sen(\theta)\,\vec{\mathbf{a_r}} + cos(\theta)\,\vec{\mathbf{a_\theta}}\big] + r\,cos^2(\theta)\,\vec{\mathbf{k}} \\ &= 2\,r sen(\theta)\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{a_r}} + r\,(cos^2(\theta) - sen^2(\theta))\,\vec{\mathbf{a_\theta}} + r\,cos^2(\theta)\,\vec{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

11.9 Operadores

Considere a base $\{\vec{\mathbf{e_r}}, \vec{\mathbf{e_\theta}}, \vec{\mathbf{e_z}}\}$ de $\mathbb{R}^3$, então:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\,\vec{\mathbf{e_r}} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,\vec{\mathbf{e_\theta}} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{\mathbf{e_z}}.$$

11.9.1 O Gradiente

O gradiente de f em coordenadas cilíndricas $\{r,\ \theta,\ z\}$ é dado por:

$$\nabla\,f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{\mathbf{e_r}} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{\mathbf{e_\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{\mathbf{e_z}},$$

onde as derivadas são calculadas em (r, θ, z).

11.9.2 A Divergência

A divergência de F em coordenadas cilíndricas $\{r,\ \theta,\ z\}$ é dada por:

$$\nabla\cdot F(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\big[r\,F_r\big]+\frac{1}{r}\,\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial F_z}{\partial z},$$

onde $F(r,\theta,z)=(F_r,F_\theta,F_z)$ e as derivadas são calculadas em (r,θ,z).

11.9.3 O Laplaciano

O Laplaciano de f em coordenadas cilíndricas $\{r,\ \theta,\ z\}$ é dado por:

$$\Delta f(r,\theta,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

onde as derivadas são calculadas em (r,θ,z).

11.9.4 O Rotacional

O rotacional de F em coordenadas cilíndricas $\{r,\ \theta,\ z\}$ é dada por:

$$\nabla\times F=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{e_r}} & r\,\vec{\mathbf{e_\theta}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_r & F_\theta & F_z\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial F_z}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right]\vec{\mathbf{e_r}}+\left[\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right]\vec{\mathbf{e_\theta}}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\big[r\,F_\theta\big]-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\vec{\mathbf{e_z}},$$

onde $F(r,\theta,z)=(F_r,F_\theta,F_z)$ e as derivadas são calculadas em (r,θ,z).

Exemplo 11.6.

[1] Seja $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Determine o gradiente e o laplaciano de f em coordenadas cilíndricas:

Passando a coordenadas cilíndricas: $f(r,\theta,z)=r^2+z^2$, então:

$$\nabla\,f(r,\theta,z)=\frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{\mathbf{e_r}}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\vec{\mathbf{e_\theta}}+\frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{\mathbf{e_z}}=2\,r\,\vec{\mathbf{e_r}}+2\,z\,\vec{\mathbf{e_z}}$$

$$\Delta f(r,\theta,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6.$$

[2] Considere o campo de vetores $F(r,\theta,z)=\vec{\mathbf{e_r}}+\dfrac{1}{r^2}\,\vec{\mathbf{e_\theta}}+z^2\,\vec{\mathbf{e_z}}$. Determine a divergência e o rotacional de F.

Como $F_r=1$, $F_\theta=\dfrac{1}{r^2}$ e $F_z=z^2$, temos:

$$\nabla\cdot F(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big[r\,F_r\big]+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=\frac{1}{r}+2\,z$$

$$\nabla\times F=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{e_r}} & r\,\vec{\mathbf{e_\theta}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 1 & r^{-2} & z^2\end{vmatrix}=-\frac{2}{r^3}\,\vec{\mathbf{k}}.$$

11.10 Operador Nabla em Coordenadas Esféricas

Considere a mudança de coordenadas esféricas. Seja $P=(x,y,z)$ um ponto no espaço xyz. Suas coordenadas esféricas são (ρ,θ,ϕ) onde ρ é a distância do ponto P à origem, θ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos x e o segmento de reta que liga $(0,0,0)$ a $(x,y,0)$ e ϕ é o ângulo formado pelo eixo positivo dos z e o segmento de reta que liga P à origem:

$$\begin{cases}x= & \rho\,sen(\phi)\,cos(\theta)\\ y= & \rho\,sen(\phi)\,sen(\theta)\\ z= & \rho\,cos(\phi),\end{cases}$$

onde $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$, $0\le\theta<2\,\pi$ e $0\le\phi\le\pi$, o que define uma região no espaço $\rho\theta\phi$.

Utilizando as coordenadas esféricas $\{\rho,\ \theta,\ \phi\}$ obtemos que o vetor posição em $\mathbb{R}^3$ é dado por:

$$R(\rho,\theta,\phi)=\rho\,cos(\theta)\,sen(\phi)\,\vec{\mathbf{i}}+\rho\,sen(\theta)\;sen(\phi)\vec{\mathbf{j}}+\rho\,cos(\phi)\,\vec{\mathbf{k}},$$

logo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial\rho}&=cos(\theta)\,sen(\phi)\,\vec{\mathbf{i}}+sen(\theta)\,sen(\phi)\,\vec{\mathbf{j}}+cos(\phi)\,\vec{\mathbf{k}}\\ \frac{\partial R}{\partial\theta}&=-\rho\,sen(\theta)\,sen(\phi)\,\vec{\mathbf{i}}+\rho\,cos(\theta)\,sen(\phi)\,\vec{\mathbf{j}}\\ \frac{\partial R}{\partial\phi}&=\rho\,cos(\theta)\,cos(\phi)\,\vec{\mathbf{i}}+\rho\,sen(\theta)\,cos(\phi)\,\vec{\mathbf{j}}-\rho\,sen(\phi)\,\vec{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

Por outro lado, $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho\, sen(\phi)$ e $h_\phi = \rho$; logo, obtemos uma nova base ortogonal $\{\vec{\mathbf{e}_\rho}, \vec{\mathbf{e}_\theta}, \vec{\mathbf{e}_\phi}\}$ definida por:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{e}_\rho} &= cos(\theta)\, sen(\phi)\, \vec{\mathbf{i}} + sen(\theta)\, sen(\phi)\, \vec{\mathbf{j}} + cos(\phi)\, \vec{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{e}_\theta} &= -sen(\theta)\, \vec{\mathbf{i}} + cos(\theta)\, \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{e}_\phi} &= cos(\theta)\, cos(\phi)\, \vec{\mathbf{i}} + sen(\theta)\, cos(\phi)\, \vec{\mathbf{j}} - sen(\phi)\, \vec{\mathbf{k}}. \end{cases}$$

Equivalentemente:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e}_\rho} \\ \vec{\mathbf{e}_\theta} \\ \vec{\mathbf{e}_\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta)\, sen(\phi) & sen(\theta)\, sen(\phi) & cos(\phi) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ cos(\theta)\, cos(\phi) & sen(\theta)\, cos(\phi) & -sen(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{bmatrix}.$$

A transformação inversa é:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{j}} \\ \vec{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta)\, sen(\phi) & -sen(\theta) & cos(\theta)\, cos(\phi) \\ sen(\theta)\, sen(\phi) & cos(\theta) & sen(\theta)\, cos(\phi) \\ cos(\phi) & 0 & -sen(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e}_\rho} \\ \vec{\mathbf{e}_\theta} \\ \vec{\mathbf{e}_\phi} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 11.7.

[1] Escreva em coordenas esféricas o vetor posição.

O vetor posição em coordenadas retangulares é $F(x, y, z) = x\, \vec{\mathbf{i}} + y\, \vec{\mathbf{j}} + z\, \vec{\mathbf{k}}$; utilizando a mudança de coordenadas esféricas , temos:

$$F(\rho, \theta, \phi) = \rho\, \vec{\mathbf{b}_\rho}.$$

[2] Seja o campo de vetores $F(\rho, \theta, \phi) = \dfrac{1}{\rho\, sen(\phi)}\, \vec{\mathbf{b}_\theta}$. Escreva F em coordenadas retangulares.

Da mudança de coordenadas esféricas, temos:
$cos(\theta) = \dfrac{x}{\rho\, sen(\phi)}$, $sen(\theta) = \dfrac{y}{\rho\, sen(\phi)}$, $x^2 + y^2 = \rho^2\, sen^2(\phi)$ e $\vec{\mathbf{b}_\theta} = -sen(\theta)\, \vec{\mathbf{i}} + cos(\theta)\, \vec{\mathbf{j}}$; então:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\rho\, sen(\phi)}\, \vec{\mathbf{b}_\theta} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, \vec{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2}\, \vec{\mathbf{j}}.$$

11.11 Operadores

Considere a base $\{\vec{\mathbf{e}_\rho}, \vec{\mathbf{e}_\theta}, \vec{\mathbf{e}_\phi}\}$ de $\mathbb{R}^3$, então:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\, \vec{\mathbf{e}_\rho} + \frac{1}{\rho\, sen(\phi)}\, \frac{\partial}{\partial \theta}\, \vec{\mathbf{e}_\theta} + \frac{1}{\rho}\, \frac{\partial}{\partial \phi}\, \vec{\mathbf{e}_\phi}.$$

11.11.1 O Gradiente

O gradiente de f em coordenadas esféricas $\{\rho,\,\theta,\,\phi\}$ é dado por:

$$\nabla\,f(\rho,\theta,\phi)=\frac{\partial f}{\partial\rho}\,\vec{\mathbf{e}_\rho}+\frac{1}{\rho\,sen(\phi)}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\vec{\mathbf{e}_\theta}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial\phi}\,\vec{\mathbf{e}_\phi},$$

onde as derivadas são calculadas em (ρ,θ,ϕ)

11.11.2 A Divergência

A divergência de F em coordenadas esféricas $\{\rho,\,\theta,\,\phi\}$ é dado por:

$$\nabla\cdot F(\rho,\theta,\phi)=\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\big[\rho^2\,F_\rho\big]+\frac{1}{\rho\,sen(\theta)}\,\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho\,sen(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\big[sen(\phi)\,F_\phi\big],$$

onde $F(\rho,\theta,\phi)=(F_r,F_\theta,F_\phi)$ e as derivadas são calculadas em (ρ,θ,ϕ)

11.11.3 O Laplaciano

O Laplaciano de f em coordenadas esféricas $\{\rho,\,\theta,\,\phi\}$ é dado por:

$$\Delta f(\rho,\theta,\phi)=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{cotg(\theta)}{\rho^2}\,\frac{\partial f}{\partial\phi}+\frac{1}{\rho^2\,sen^2(\phi)}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2},$$

onde as derivadas são calculadas em (ρ,θ,ϕ)

11.11.4 O Rotacional

O rotacional de F em coordenadas esféricas $\{\rho,\,\theta,\,\phi\}$ é dado por:

$$\nabla\times F=\frac{1}{\rho^2\,sen(\phi)}\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{b}_\rho} & \rho\,sen(\phi)\,\vec{\mathbf{b}_\theta} & \rho\,\vec{\mathbf{b}_\phi}\\ & & \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ & & \\ F_\rho & \rho\,sen(\phi)\,F_\theta & \rho\,F_\phi\end{vmatrix}$$

$$=A(\rho,\theta,\phi)\;\vec{\mathbf{b}_\rho}+B(\rho,\theta,\phi)\;\vec{\mathbf{b}_\theta}+C(\rho,\theta,\phi)\,\vec{\mathbf{b}_\phi},$$

tal que:

$$A(\rho,\theta,\phi)=\frac{1}{\rho^2\,sen(\phi)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\big[\rho\,F_\phi\big]-\frac{\partial}{\partial\phi}\big[\rho\,sen(\phi)\,F_\theta\big]\right]$$
$$B(\rho,\theta,\phi)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial\rho}\big[\rho\,F_\phi\big]\right]$$
$$C(\rho,\theta,\phi)=\frac{1}{\rho\,sen(\phi)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\big[\rho\,sen(\phi)\,F_\theta\big]-\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}\right]$$

onde $F(\rho,\theta,\phi)=(F_r,F_\theta,F_\phi)$ e as derivadas são calculadas em (ρ,θ,ϕ)

Exemplo 11.8.

[1] Seja $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Determine o gradiente e o laplaciano de f em coordenadas esféricas.

Passando a coordenadas esféricas: $f(\rho,\theta,\phi)=\rho^2$, então:

$$\nabla\,f(\rho,\theta,\phi)=\frac{\partial f}{\partial\rho}\,\vec{\mathbf{e}_\rho}=2\,\rho\,\vec{\mathbf{e}_\rho}$$

$$\Delta f(\rho,\theta,\phi)=\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\,\frac{\partial f}{\partial\rho}=6.$$

[2] Considere o campo de vetores $F(\rho,\theta,\phi)=\rho^2\,\vec{\mathbf{e}_\rho}+\rho\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{e}_\theta}+\rho\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{e}_\phi}$. Determine a divergência e o rotacional de F.

Como $F_\rho=\rho^2$, $F_\theta=\rho\,cos(\theta)$ e $F_\phi=\rho\,sen(\theta)$, então:

$$\nabla\cdot F(\rho,\theta,\phi)=\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\Big[\rho^2\,F_\rho\Big]+\frac{1}{\rho\,sen(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big[sen(\theta)\,F_\theta\Big]+\frac{1}{\rho\,sen(\theta)}\,\frac{\partial^2 F_\phi}{\partial\phi^2}$$

$$=4\,\rho+cos(2\,\theta)\,cosec(\theta)$$

$$\nabla\times F=\frac{1}{\rho^2\,sen(\phi)}\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{e}_\rho} & \rho\,sen(\phi)\,\vec{\mathbf{e}_\theta} & \rho\,\vec{\mathbf{e}_\phi}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\[2ex] \rho & \rho^2\,sen(\phi)\,cos(\theta) & \rho^2\,sen(\theta)\end{vmatrix}$$

$$=2\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{b}_\rho}-2\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{b}_\theta}+2\,cos(\theta)\,\vec{\mathbf{b}_\phi}$$

11.12 Campos de Vetores Soleinoidais

11.12.1 Introdução

Lembremos que um campo de vetores de classe C^1 é soleinoidal se sua divergência é nula; isto é:

$$\nabla \cdot F = 0.$$

Os campos de vetores soleinoidais e/ou irrotacionais desempenham um papel fundamental em algumas áreas aplicadas. Por exemplo, dado F um campo de vetores de classe C^1podemos ter:

1. Solenoidal e irrotacional se: $div\, F = 0$ e $rot\, F = 0$, como, por exemplo, campos eletrostáticos numa região sem cargas.

2. Solenoidal e rotacional se: $div\, F = 0$ e $rot\, F \neq 0$, como, por exemplo, campos magnéticos estáticos num condutor com corrente.

3. Não solenoidal e irrotacional se: $div\, F \neq 0$ e $rot\, F = 0$, como, por exemplo, campos eletrostáticos numa regão com cargas.

4. Não solenoidal e rotacional se: $div\, F \neq 0$ e $rot\, F \neq 0$, como, por exemplo, campos elétricos num meio com cargas com um campo magnético que varia no tempo.

Nos seguintes parágrafos apresentaremos uma caracterização dos campos soleinoidais semelhante à caracterização dos campos irrotacionais.

11.12.2 Potenciais Vetoriais

Sabemos que dado um campo de vetores F de classe C^1 tal que $rot(F) = \vec{0}$ isto significa, que existe ϕ de classe C^2 tal que:

$$F = -\nabla\, \phi$$

e a função ϕ é o potencial do campo F.

Definimos e denotamos o potencial vetorial A do campo F por:

$$F = \nabla \times A.$$

Notemos que este campo é solenoidal:

$$div\, F = \nabla \cdot (\nabla \times A) = div\, rot\, A = 0.$$

O potencial vetorial de um campo não é único. De fato:

$$\nabla \times \big(A + \nabla\,\psi\big) = \nabla \times A + \nabla \times \nabla\,\psi = \nabla \times A,$$

para qualquer ψ de classe C^2 O problema reciproco da existência do potencial vetorial de um campo de vetores é verdadeiro. É o que assegura a próxima proposição.

Proposição 11.4.

Se F é um campo de vetores solenoidal, isto é $\nabla \cdot F = 0$, então existe um potencial vetorial A de F.

Seja $F = (F_1, F_2, F_3)$ e $A = (A_1, A_2, A_3)$, então $F = \nabla \times A$ é equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_3}{\partial y} - \dfrac{\partial A_2}{\partial z} = F_1 \\[2ex] \dfrac{\partial A_1}{\partial z} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x} = F_2 \\[2ex] \dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y} = F_3. \end{cases}$$

Como não temos unicidade do potencial, faremos uma escolha arbitrária para apresentar o potencial vetorial. Considere $A_1 = 0$ (outras escolhas podem ser feitas). Integrando o sistema anterior:

$$A_2 = \int_{x_0}^{x} F_3\,dx + h_2(y,z), \quad A_3 = \int_{x_0}^{x} F_2\,dx + h_3(y,z),$$

onde h_2 e h_3 são funções arbitrárias independentes de x. Da primeira equação do sistema, temos:

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial h_3}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial z},$$

sabendo que $\nabla \cdot F = 0$ e integrando em relação a x, temos:

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = F_1(x,y,z) - F_1(x_0,y,z) + \frac{\partial h_3}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial z}.$$

Como h_2 e h_3 são funções arbitrárias, escolhemos $h_2 = 0$ e $h_3 = \displaystyle\int_{y_0}^{y} F_1(x_0,y,z)\,dy$ e temos:

$$A_2 = \int_{x_0}^{x} F_3(x, y, z)\, dx$$
$$A_3 = \int_{y_0}^{y} F_1(x_0, y, z)\, dy - \int_{x_0}^{x} F_2(x, y, z)\, dx.$$

As funções arbitrárias h_2 e h_3 não são únicas. Claramente a estas coordenadas podem ser somadas constantes ou gradientes sem afetar o campo definido.

Exemplo 11.9.

Determine, se existir o potencial vetorial de F, se:

[1] $F(x, y, z) = y\,\vec{\mathbf{i}} + x\,\vec{\mathbf{j}}$.

Calculemos a divergência de F:

$$\nabla \cdot F = 0,$$

o campo é solenoidal. Façamos $A_1 = 0$, então:

$$A_2 = 0$$
$$A_3 = \int_{y_0}^{y} y\, dy - \int_{x_0}^{x} x\, dx = \frac{y^2 - x^2}{2} - \frac{y_0^2 - x_0^2}{2}.$$

Logo:

$$A = \frac{y^2 - x^2}{2}\,\vec{\mathbf{k}},$$

onde consideramos $x_0 = y_0 = 0$.

[2] $F(x, y, z) = cos(x)\,\vec{\mathbf{i}} + (y\,sen(x) - y^2)\,\vec{\mathbf{j}} + 2\,y\,z\,\vec{\mathbf{k}}$.

Calculemos a divergência de F:

$$\nabla \cdot F = -sen(x) + sen(x) - 2\,y + 2\,y = 0,$$

o campo é solenoidal. Façamos $A_1 = 0$, enão:

$$A_2 = \int_{x_0}^{x} 2\,y\,z\, dx = 2\,y\,z\,(x - x_0)$$
$$A_3 = \int_{y_0}^{y} cos(x_0)\, dy - \int_{x_0}^{x} (y\,sen(x) - y^2)\, dx = y\,cos(x) + y^2\,(x - x_0) - y_0\,cos(x_0).$$

Logo:

$$A = 2\,y\,z\,(x - x_0)\,\vec{\mathbf{j}} + \big(y\,cos(x) + y^2\,(x - x_0) - y_0\,cos(x_0)\big)\,\vec{\mathbf{k}}.$$

11.12.3 Caracterização dos Campos Soleinoidais

O seguinte teorema é análogo ao da caracterização dos campos conservativos via o conceito de irrotacionalidade.

Teorema 11.1. Seja F um campo de vetores de classe C^1 definido num conjunto aberto. São equivalentes:

1. $F = \nabla \times A$.
2. $\nabla \cdot F = 0$
3. $\displaystyle\iint_S F\, dS = 0$ para toda superfície tal $\partial S = \emptyset$ e $S \subset W$.

Observe que 1 $\Leftrightarrow$ 2; do teorema de Gauss segue que 2 $\Rightarrow$ 3. A recíproca que falta fica como exercício de pesquisa para os alunos.

11.13 Teorema de Helmholtz

A seguir apresentaremos uma versão simplificada de um teorema muito utilizados na Teoria do Eletromagnetismo, pois é comum conhecer a divergência e o rotacional de um campo, por exemplo, o campo elétrico. Logo, o teorema a seguir nos permite expressar um campo por duas quantidades conhecidas.

Primeiramente vejamos o seguinte lema:

Lema 11.1. Todo campo de vetores é univocamente determinado por sua divergência e seu rotacional, definidos em uma região $W \subset \mathbb{R}^3$, sendo especificada sua componente norma a ∂W.

De fato, suponha que existem F e G campos de vetores tais que:

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot F = \nabla \cdot G \quad \text{em} \quad W \\
&\nabla \times F = \nabla \times G \quad \text{em} \quad W \\
&F \cdot \vec{\mathbf{n}} = G \cdot \vec{\mathbf{n}} \quad \text{em} \quad \partial W,
\end{aligned}$$

onde $\vec{\mathbf{n}}$ é o vetor normal unitário da ∂W. Considere $H = F - G$; então:

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad \nabla \cdot H = 0 \quad \text{em} \quad W \\
&(2) \qquad \nabla \times H = 0 \quad \text{em} \quad W \\
&(3) \qquad H \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{em} \quad \partial W,
\end{aligned}$$

De (2) temos que existe ψ tal que $H = -\nabla\psi$, logo de (1) segue que:

$$0 = \nabla \cdot H - \nabla \cdot \nabla\psi = -\Delta\psi,$$

de (3), temos que:

$$0 = H \cdot \vec{\mathbf{n}} = \nabla\psi \cdot \vec{\mathbf{n}}.$$

Da primeira identidade de Green:

$$\iiint_W \left[\psi\,\Delta\psi + \|\nabla\,\psi\|^2\right] dx\,dy\,dz = \iint_{\partial W} \psi(\nabla\psi) \cdot \vec{\mathbf{n}}\,dS \Longrightarrow \iiint_W \|\nabla\,\psi\|^2\,dx\,dy\,dz = 0,$$

donde $\|\nabla\,\psi\| = 0$; logo $H = 0$ e $F = G$.

Observações 11.1.

1. Suponha que $F = W + G$ tal que $\nabla \times W = 0$ e $\nabla \cdot G = 0$. Se $\nabla \times W = 0$, existe ϕ tal que $W = -\nabla\,\phi$; se $\nabla \cdot G = 0$, existe A tal que $G = \nabla \times A$; logo, sempre podemos supor que:

$$F = -\nabla\phi + \nabla \times A.$$

2. O teorema de Helmholtz afirma que um campo de vetores de classe C^2 junto com algumas condições de regularidade, sempre pode ser escrito com uma componente solenoidal e outra irrotacional.

Teorema 11.2. Todo campo de vetores é univocamente de terminado por sua divergência, seu rotacional, definidos em uma região $W \subset \mathbb{R}^3$, de volume finito:

$$F = -\nabla\phi + \nabla \times A,$$

onde

$$(1) \qquad \phi = \frac{1}{4\,\pi}\iiint_W \frac{\psi(\vec{r_1})}{R}\,dv$$

$$(2) \qquad A = \frac{1}{4\,\pi}\iiint_W \frac{\vec{c}(\vec{r_1})}{R}\,dv,$$

e $R = \|\vec{r} - \vec{r_1}\|$, $\psi = \nabla \cdot F$ e $\vec{c} = \nabla \times F$. ψ pode ser interpretado como uma fonte (densidade de carga) e $\vec{c}$ como circulação (densidade de corrente).

Observações 11.2.

1. Observe que $-\nabla\phi$ é irrotacional e $rot\, A$ é solenoidal.

2. A função ψ também é chamada fonte escalar e $\vec{c}$ fonte vetorial.

3. Caso a região seja $\mathbb{R}^3$, consideramos a seguinte hipótesis adicional:

$$\lim_{r\to\pm\infty} R^2\, \phi(\vec{r}) = 0, \quad \lim_{r\to\pm\infty} R^2\, \vec{c}(\vec{r}) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r\to\pm\infty} F(\vec{r}) = 0.$$

4. E as integrais (1) e (2) que definem o campo F são integrais impróprias convergentes.

Agora apliquemos $\nabla \cdot F = -\Delta\, \phi$; logo, obtemos:

$$\Delta F = -\nabla \cdot F,$$

uma equação tipo Poisson. É possível provar que a solução desta equação é exatamente (1). Por outro lado $\nabla \times A = F + \nabla\phi$, logo:

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla \times F + \nabla \times (\nabla\phi) \Longrightarrow \Delta A = -\nabla \times F,$$

que também é uma equação tipo Poisson. A solução desta equação é exatamente (2).

No esboço da prova do Teorema de Helmholtz se utiliza fortemente a existência de soluções da equação de Poisson. Existe bibliografia avançada, onde se prova que as hipóteses do Teorema de Helmholtz são suficientes para obter a existência de soluções da equação de Poisson.

11.14 Aplicação

A equação de Maxwell sobre a divergência da densidade do fluxo magnético $\nabla \cdot B = 0$ implica em que o campo magnético é soleinoidal, logo $B = \nabla \times A$, onde A é chamado vetor potencial magnético. Como antes, podemos escrever a lei de Faraday:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big[\nabla \times A\Big].$$

Logo, pelas propriedades do produto vetorial, podemos escrever:

$$\nabla \times \left[E + \frac{\partial A}{\partial t}\right] = 0.$$

Isto é, irrotacional, $E + \dfrac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\,\phi$, ϕ é o potencial elétrico, e:

$$E = -\nabla\,\phi - \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Utilizando as relações que existem num meio homogêneo: $D = \varepsilon\,E$ e $B = \mu\,H$. A lei de Ampère-Maxwell $\nabla \times H = J + \dfrac{\partial D}{\partial t}$ pode ser reescrita:

$$\nabla \times \nabla \times A = \mu\,J + \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\left[-\nabla\,\phi - \frac{\partial A}{\partial t}\right].$$

Utilizando a identidade $\nabla \times \nabla \times A = \nabla\big(\nabla \cdot A\big) - \Delta A$, temos:

$$\Delta A - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu\,J - \nabla\left[\nabla \cdot A + \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial \phi}{\partial t}\right].$$

Como $B = \nabla \times A$, pelo teorema Helmholtz podemos escolher a divergência; se escolhermos:

$$\nabla \cdot A = -\mu\,\varepsilon\,\frac{\partial \phi}{\partial t},$$

o campo A fica definido. Esta escolha é chamada condição de Lorentz. Utilizando a condição de Lorentz, não é difícil obter a equação de onda não homogênea para o vetor potencial magnético:

$$\Delta A - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu\,J.$$

De forma análoga, aplicando a divergência a $E + \dfrac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\,\phi$, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\rho_v}{\varepsilon} &= \nabla \cdot \left[-\nabla\,\phi - \frac{\partial A}{\partial t}\right]\\ &= -\nabla \cdot \nabla\,\phi - \nabla\,\frac{\partial A}{\partial t} = -\Delta\,\phi - \frac{\partial}{\partial t}\big[\nabla \cdot A\big]\\ &= -\Delta\,\phi + \varepsilon\,\mu\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Donde obtemos:

$$\Delta\,\phi - \varepsilon\,\mu\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon},$$

que é a equação de onda não homogênea para o potencial elétrico.

11.15 Exercícios

1. Escreva os seguintes campos dados em coordenadas cartesianas retangulares, em coordenadas cilíndricas:

   (a) $F(x,y,z) = z^2\,\vec{\mathbf{i}} - x\,\vec{\mathbf{j}} + y\,\vec{\mathbf{k}}$.

   (b) $F(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\,\big[x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\big]$.

   (c) $F(x,y,z) = \dfrac{x}{y}\,\vec{\mathbf{i}}$.

2. Considere o campo magnético F gerado quando um fio infinito situado sobre o eixo dos z é percorrido por uma corrente I, no sentido positivo do eixo dos z:

$$F(x,y,z) = \frac{2\,I}{c\,(x^2+y^2)}\,\big[-y\,\vec{\mathbf{i}} + x\,\vec{\mathbf{k}}\big],$$

   onde c é a velocidade da luz. Escreva o campo F em coordenadas cilíndricas.

3. Escreva os seguintes campos dados em coordenadas cilíndricas, em coordenadas cartesianas retangulares:

   (a) $F(r,\theta,z) = \vec{\mathbf{e_r}}$.

   (b) $F(r,\theta,z) = r^2\,\vec{\mathbf{e_\theta}}$.

   (c) $F(r,\theta,z) = r\,\vec{\mathbf{e_r}} + r\,\vec{\mathbf{e_\theta}}$.

4. Calcule o laplaciano de $f(r,\theta,z) = \dfrac{cos(\theta)}{r}$.

5. Sejam $f(r,\theta,z) = ln(r)$ e $F(r,\theta,z) = \theta\,\vec{\mathbf{k}}$. Verifique que: $\nabla f = \nabla \times F$.

6. Sendo dado o campo de vetores $F(r,\theta,z) = r cos(\theta)\,\vec{\mathbf{e_r}} + r\,sen(\theta)\,\vec{\mathbf{e_\theta}}$, calcule $\nabla \times F$.

7. Considere o seguinte campo gravitacional no espaço gerado por uma partícula de massa M situada na origem:

$$F(x,y,z) = -\frac{G\,M}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,\big[x\,\vec{\mathbf{i}} + y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}\big],$$

   onde G é a constante universal de gravitação. Escreva o campo em coordenadas esféricas.

8. Escreva o campo de vetores $F(x,y,z) = 2\,y\,\vec{\mathbf{i}} - z\,\vec{\mathbf{j}} + 3\,x\,\vec{\mathbf{k}}$ em coordenadas esféricas.

9. Em coordenadas esféricas, um campo elétrico gerado por uma carga elétrica Q situada na origem é dado por:

$$F(x,y,z) = \frac{k\,Q}{\rho^2}\,\vec{\mathbf{r}_\rho},$$

onde k é a constante de Coulomb. Escreva o campo em coordenadas retangulares.

10. Exprima em coordenadas esféricas a equação de transmissão de calor: $\dfrac{\partial U}{\partial t} = k\,\Delta U$, sendo U independente de θ e ϕ.

11. Determine o rotacional do campo $F(\rho,\theta,\phi) = \dfrac{k}{\rho^2}\,\vec{\mathbf{r}_\rho}$, k constante.

12. Calcule a constante c de modo que os campos admitam potencial vetorial.

    (a) $F(x,y,z) = (2\,x + cos(y))\,\vec{\mathbf{i}} - c\,y\,\vec{\mathbf{j}} + (6\,z - e^y)\,\vec{\mathbf{k}}$.

    (b) $F(x,y,z) = 2\,c\,x\,\vec{\mathbf{i}} + (cos(z) - 4\,y)\,\vec{\mathbf{j}} - (2\,z + e^x)\,\vec{\mathbf{k}}$.

13. Verifique se o campo $F(x,y,z) = x\,\vec{\mathbf{i}} - 2\,y\,\vec{\mathbf{j}} + z\,\vec{\mathbf{k}}$ admite potencial vetorial e, em caso afirmativo, calcule-o.

14. Dado $F(x,y,z) = 2\,x\,\vec{\mathbf{i}} - y\,\vec{\mathbf{j}} - z\,\vec{\mathbf{k}}$, verifique que existe um campo A tal que $\nabla \times A = F$, em caso afirmativo, calcule A.

Capítulo 12

APÊNDICE

12.1 Teorema de Green

Provaremos uma versão particular do teorema de Green para regiões chamadas elementares. Para isto, consideraremos três tipos especiais de regiões do plano, que serão definidas a seguir.

12.1.1 Regiões de tipo I

D é uma região de tipo I se pode ser descrita por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\},$$

sendo $\phi_i : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) funções contínuas tais que $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

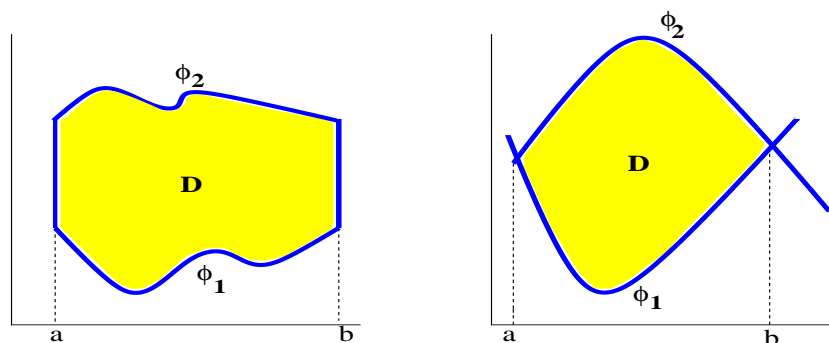



Figura 12.1: Regiões de tipo I.

12.1.2 Regiões de tipo II

D é uma região de tipo II se pode ser descrita por:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

sendo $\psi_i : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ funções contínuas tais que $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ para todo $y \in [c, d]$.

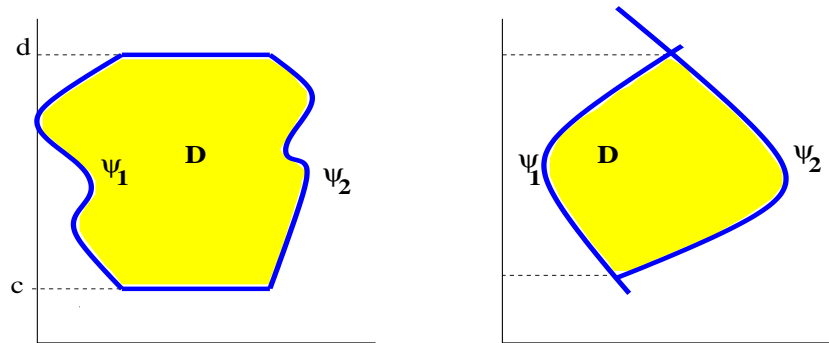



Figura 12.2: Regiões de tipo II.

12.1.3 Regiões de tipo III

D é uma região de tipo III se pode ser descrita como região de tipo I ou de tipo II.

Qualquer destas regiões é chamada elementar. As regiões elementares são fechadas e limitadas. Uma região $D \subset \mathbb{R}^2$ é chamada simples se $\partial D = C$ é uma curva fechada simples. As fronteiras das regiões elementares podem ser orientadas positivamente da seguinte forma: Se D é uma região de tipo I:

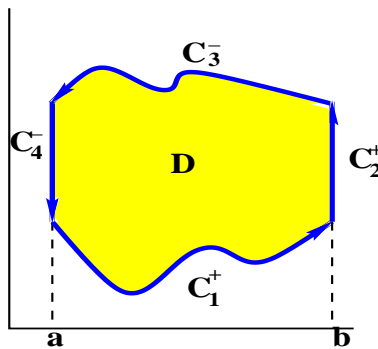



Figura 12.3:

$\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^- \cup C_4^-$ Se D é uma região de tipo II:

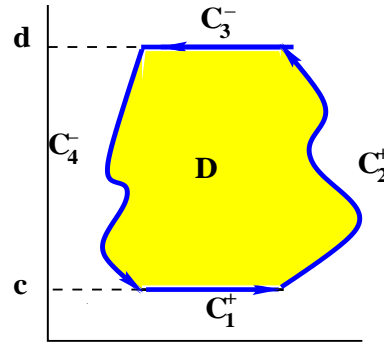



Figura 12.4:

$\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^- \cup C_4^-$

Teorema 12.1. (Teorema de Green) Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, D uma região simples, orientada positivamente tal que $D \subset U$ e $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores de classe C^1, com funções coordenadas (F_1, F_2). Se $C = \partial D$ tem uma parametrização diferenciável por partes e está orientada positivamente em relação a D, então:

$$\boxed{\oint_{\partial D} F = \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right] dx\, dy}$$

Prova : Escrevamos D como região de tipo I:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\},$$

sendo $\phi_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ funções contínuas tais que $\phi_1(x) \le \phi_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Seja C_1 a curva parametrizada por $\gamma_1(x) = (x, \phi_1(x))$, $a \le x \le b$ e C_3 a curva parametrizada por $\gamma_2(x) = (x, \phi_2(x))$, $a \le x \le b$. Provaremos que:

$$(1) \qquad \int_{\partial D} F_1\, dx = -\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Pelo teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} -\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx\, dy &= \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy\right] dx \\ &= \int_a^b \big(F_1(x,\phi_1(x)) - F_1(x,\phi_2(x))\big)\, dx \\ &= \int_{C_1} F_1 - \int_{C_3} F_1 = \int_{\partial D} F_1\, dx, \end{aligned}$$

pois $\partial D^+ = C_1^+ \cup C_2^+ \cup C_3^- \cup C_4^-$ e

$$\int_{C_2} F_1 + \int_{C_4} F_1 = 0;$$

onde C_2 é parametrizada por $\gamma_2(x) = (b, y)$, $\phi_1(b) \leq y \leq \phi_2(b)$ e C_4 é parametrizada por $\gamma_4(x) = (a, y)$, $\phi_1(a) \leq y \leq \phi_2(a)$.

De forma análoga, escrevendo D como região de tipo II, prova-se que:

$$(2) \qquad \int_{\partial D} F_2\, dy = \iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dx\, dy.$$

O teorema segue de (1) e (2).

12.2 Teorema de Stokes

Teorema 12.2. (Teorema de Stokes) Seja F um campo de vetores de classe C^1, definido num aberto U tal que $S \subset U$; então:

$$\boxed{\iint_s rot(F)\, dS = \oint_{\partial S} F}$$

Provaremos o teorema para o caso em que $S = G(f)$, onde $z = f(x, y))$ é de classe C^2.

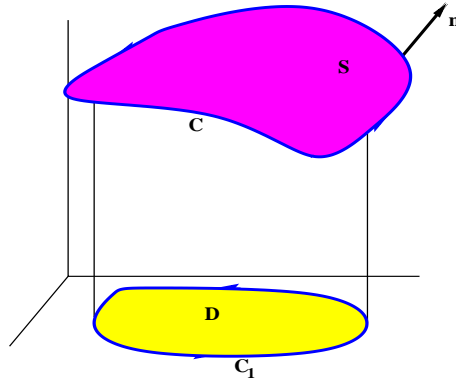



Figura 12.5:

Parametrizamos S por $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ tal que $(x, y) \in D$; logo:

$$\Phi_x \times \Phi_y = \big(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1 \big).$$

Denotemos $F = (F_1, F_2, F_3)$; então:

$$(1) \qquad \iint_S rot(F)\, dS = \iint_D \Big[P(x, y) \Big[-\frac{\partial z}{\partial x} \Big[+ Q(x, y) \Big[-\frac{\partial z}{\partial y} \Big] + R(x, y) \Big] dx\, dy,$$

onde $P(x,y) = \dfrac{\partial F_3}{\partial y} - \dfrac{\partial F_2}{\partial z}$, $Q(x,y) = \dfrac{\partial F_1}{\partial z} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x}$ e $R(x,y) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$, sendo as derivadas parciais calculadas em $\Phi(x,y)$. Por outro lado:

$$\oint_{\partial S} F = \int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

Parametrizamos C por $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big)$, $t \in [a,b]$, então:

$$\oint_{\partial S} F = \int_a^b \left[F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt}\right] dt. \tag{2}$$

Utilizando a regra da cadeia $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ e substituindo em (2), obtemos:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} F &= \int_a^b \left[F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}\right] dx + \left[F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}\right] dy \\ &= \oint_{C_1} \left[F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}\right] dx + \left[F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}\right] dy \\ &= \oint_{\partial D} \left[F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x}\right] dx + \left[F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y}\right] dy\end{aligned}$$

pois C_1 é a projeção de C sobre o plano xy. Aplicando o teorema tipo Green à última integral:

$$\oint_{\partial S} F = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\big(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\big)\right] dx\,dy = \iint_S rot(F)\,dS,$$

onde a última igualdade é obtida utilizando (1).

12.3 Teorema de Gauss

Provaremos o teorema de Gauss para sólidos definidos da seguinte forma: Seja $W \subset \mathbb{R}^3$.

12.3.1 Região de tipo I

W é do tipo I se:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in D,\ f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\},$$

onde D é a região elementar no plano, projeção de W no plano xy e $f_1,\ f_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo $f_1 \le f_2$.

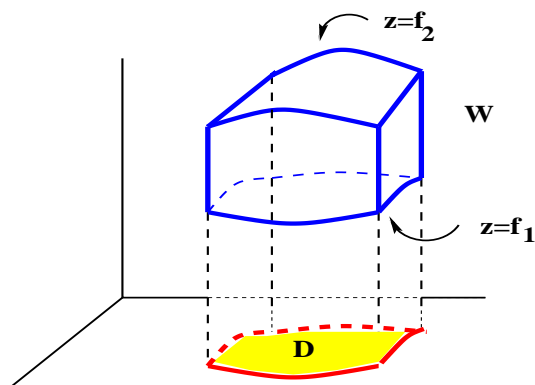



Figura 12.6: Região de tipo I.

12.3.2 Região de tipo II

W é do tipo II se:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, z) \in D,\ g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\},$$

onde D é a região elementar no plano, projeção de W no plano xz e $g_1,\ g_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo $g_1 \leq g_2$.

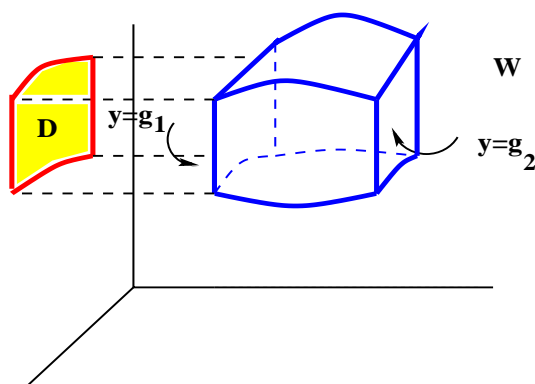



Figura 12.7: Região de tipo II.

12.3.3 Região de tipo III

W é do tipo III se:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z) \in D,\ h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\},$$

onde D é a região elementar no plano, projeção de W no plano yz e $h_1,\ h_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sendo $h_1 \leq h_2$.

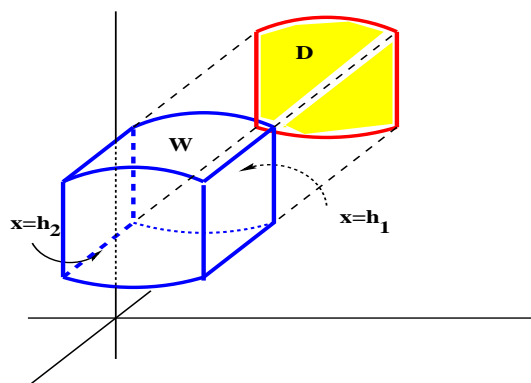



Figura 12.8: Região de tipo III.

12.3.4 Região de tipo IV

W é do tipo IV se é do tipo I, tipo II ou tipo III.

Em qualquer dos casos anteriores, W é chamada região elementar do espaço. As regiões elementares são conjuntos fechados e limitados em $\mathbb{R}^3$.

Alguns exemplos de regiões elementares no espaço:

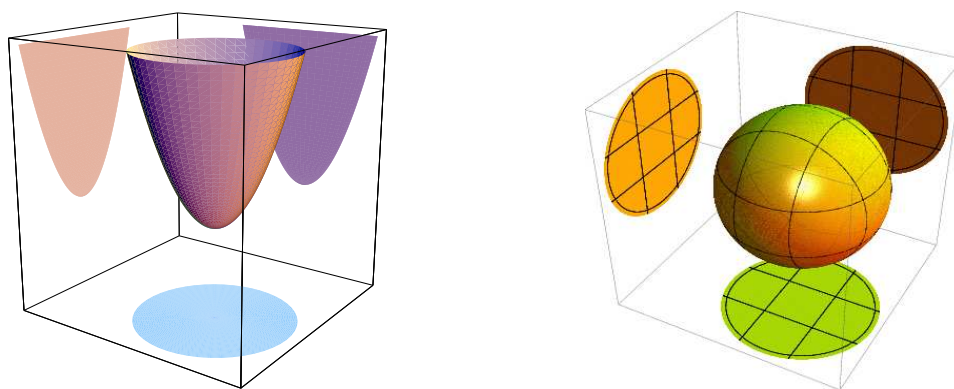



Figura 12.9: Regiões elementares no espaço.

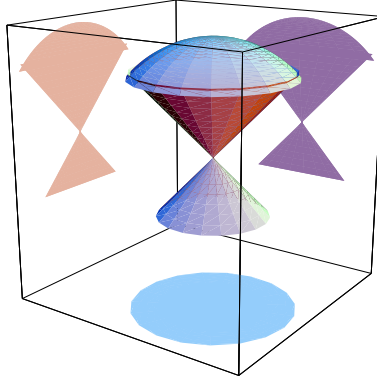



Figura 12.10:

Teorema 12.3. (Teorema de Gauss) Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ um sólido tal que $\partial W = S$ é uma superfície fechada e limitada, orientada positivamente. Se F é um campo de vetores de classe C^1 definido no conjunto aberto U tal que $W \subset U$, então:

$$\boxed{\iint_{\partial W} F\, dS = \iiint_W div(F)\, dx\, dy\, dz}$$

Suponha que W é de tipo IV. Seja $F = F_1\,\tilde{\mathbf{i}} + F_2\,\tilde{\mathbf{j}} + F_3\,\tilde{\mathbf{k}}$; então $div(F) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$;

$$\iiint_W div(F)\, dx\, dy\, dz = \iiint_W \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz + \iiint_W \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dx\, dy\, dz + \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Provaremos que $\displaystyle\iint_{\partial W} L\, dS = \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$, onde $L = (0, 0, F_3)$.
Considerando W de tipo I, então: $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D,\ f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)\}$ e :

$$\begin{aligned}\iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz &= \iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dz\right] dx\, dy \\ &= \iint_D \big(F_3(x, y, f_2(x, y)) - F_3(x, y, f_1(x, y))\big)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

$\partial W = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 = \{(x, y, f_2(x, y)) \,/\, (x, y) \in D\}, \quad S_2 = \{(x, y, f_1(x, y)) \,/\, (x, y) \in D\}$$

e S_3 consiste de todos os segmentos de retas que ligam $(x, y, f_2(x, y))$ e $(x, y, f_1(x, y))$, $(x, y) \in \partial D$. Como a normal externa em qualquer ponto de S_3 é perpendicular ao segmento de reta que liga os pontos $(x, y, f_2(x, y))$ e $(x, y, f_1(x, y))$ e é paralela ao plano xy

então seu produto interno pelo campo L é zero. Logo, calculamos as integrais em S_1 e S_2:

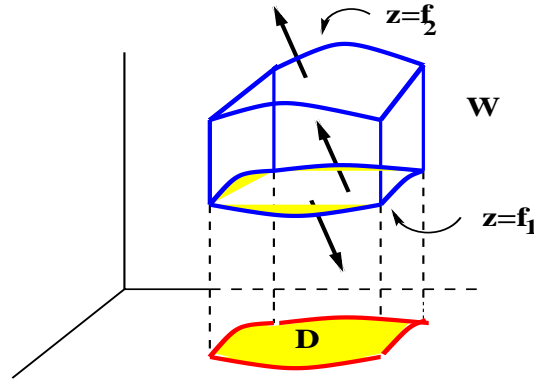



Figura 12.11:

S_1 é parametrizada como o gráfico de $z = f_2(x,y)$; então, o vetor normal ao gráfico é paralelo ao vetor normal externo de W; portanto:

$$(1) \qquad \iint_{S_1} L\, dS = \iint_D (0,0,F_3(x,y,z)) \left[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right] dx\, dy$$
$$= \iint_D F_3(x,y,f_2(x,y))\, dx\, dy.$$

S_2 é parametrizada como o gráfico de $z = f_1(x,y)$; então, o vetor normal ao gráfico é paralelo ao vetor normal externo de W, portanto:

$$(2) \qquad \iint_{S_2} L\, dS = -\iint_D F_3(x,y,f_1(x,y))\, dx\, dy.$$

De (1) e (2), obtemos: $\displaystyle\iint_{\partial W} L\, dS = \iiint_W \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$. De forma análoga prova-se que :

i) Como W também é de tipo II, então:

$$\iint_{\partial W} M\, dS = \iiint_W \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz,$$

onde $M = (F_1, 0, 0)$.

ii) Como W também é de tipo III, então:

$$\iint_{\partial W} N\, dS = \iiint_W \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dx\, dy\, dz,$$

onde $M = (0, F_2, 0)$. Logo,

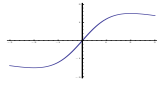
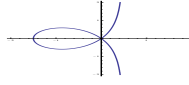
$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial W} F\, dS &= \iint_{\partial W} M\, dS + \iint_{\partial W} N\, dS + \iint_{\partial W} L\, dS \\
&= \iiint_{W} \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz + \iiint_{W} \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dx\, dy\, dz + \iiint_{W} \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W} div(F)\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}
$$

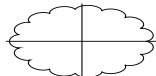
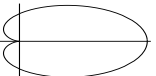
Capítulo 13

Soluções

Capítulo I

1. a) $(-6,1,0)$ b) $(18,0,7)$ c) $(-7,1,10)$ d) $(-29,-1,-7)$ e) $(0,-6,1)$
f) $(5,-10,27)$ g) $(4,2,-1)$ h) $(-15,21,-12)$ i) $(4,6,-7)$
j) $(-1,11,-11)$ k) $(18,-16,5)$ l) $(3,-12,2)$
m) $(-2,6,0)$ n) $(-8,-23,1)$ o) $(-1,-6,4)$
3. a) $\theta = arccos(\frac{\sqrt{210}}{21})$ b) $\theta = arccos(\frac{3\sqrt{246}}{82})$ c) $\theta = arccos(\frac{-\sqrt{72}}{9})$ d) $\theta = arccos(\frac{\sqrt{231}}{154})$
e) $\theta = arccos(\frac{-34}{\sqrt{5005}})$ f) $\theta = arccos(\frac{-2\sqrt{2}}{7})$ g) $\theta = arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$ h) $\theta = arccos(\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{63}})$
i) $\theta = arccos(\frac{\sqrt{42}}{14})$ j) $\theta = arccos(\frac{\sqrt{106}}{33})$

5. a) $(5,6,7)$ b) $(10,-7,4)$ c) $(2,0,2)$ d) $(-25,11,-1)$
e) $(22,58,-1)$ f) $(8,-3,-3)$ g) $(-3,0,3)$ h) $(-5,-5,10)$
i) $(-2,-5,2)$ j) $(-2,2,20)$ k) $(1,-2,-2$ l) $(-2,2,2)$
m) $(-5,-9,12)$ n) $(-8,-1,6)$ o) $(\frac{11}{2},3,-\frac{47}{6})$ p) $(-\frac{7}{5},\frac{1}{6},-\frac{1}{3})$
7. a) $\frac{\sqrt{243}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{1016}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{564}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{401}}{2}$
9. a) $\sqrt{37}$ b) $\sqrt{373}$ c) $\sqrt{150}$ d) $\sqrt{891}$ e) $\sqrt{37}$
f) $\sqrt{854}$ g) $\sqrt{21}$ h) $\sqrt{44}$ i) $\sqrt{810}$
j) $\sqrt{101}$ k) $\sqrt{149}$ l) $\sqrt{85}$
m) $\sqrt{154}$ n) $\sqrt{216}$
11. $P = (3,20,17)$
13. a) $4x+14y-11z+6=0$ b) $2x-7y+z-21=0$ c) $2x-y+2z-3=0$ d) $y=-1$
e) $5x-5y-7z-21=0$ f) $x-10y-z+29=0$ g) $380x+33y-10z=0$ h) $58x-17y+3z-47=0$
15) A distância é $\sqrt{\frac{22}{15}}$, a equação: $\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}+5t \\ y(t) = \frac{3}{2}-t \\ z(t) = 2t \end{cases}$
17. $2x+2y+z-7=0$ 19. $2x+3y+6y-35=0$

Quádricas

1. a) elipsóide b) parabolóide circular c) hiperbolóide de uma folha d) cone elítico e) parabolóide elítico f) parabolóide hiperbólico g) hiperbolóide de duas folhas h) esfera de centro $(1,0,0)$ e raio 1 i) cilindro j) cilindro
3. a) elipse b) parábola c) círculo 5. $(9,-2,5)$ 7. $z^2+y^2=4x^2$ 9. $x^2+(z-1)^2=2y+1$ parabolóide

Capítulo II

1. a) $x=t,\ y=2t+7;\ t\in\mathbb{R}$ b) $x=t-2,\ y=t;\ t\in\mathbb{R}$ c) $x=4\,cos,\ y=4\,sen;\ t\in[0,2\,\pi]$ d) $x=t,\ y=tg^2;\ t\in(0,\pi)$ e) $x=t^2,\ y=2\,ln;\ t>0$ f) $x=2\,cos,\ y=3\,sen(t);\ t\in[0,2\,\pi]$ g) $x=3t+1,\ y=2t+1;\ t\in[0,1]$ h) $x=1+cos(t),\ y=2+sen(t);\ t\in[0,2\,\pi]$ i) $x=-1+2cos(t)$, $y=1+2sen(t)$; $t\in[0,2\,\pi]$ j) $x=t$, $y=1-t^2$; $t\in\mathbb{R}$ k) $x=\pm 3cosh(t)$, $y=2senh(t)$; $t\in\mathbb{R}$ l) $x=cos(t)/2$, $y=1/2+sen(t)/2$; $t\in[0,2\,\pi]$
3. a) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ b) $x^2-y^2=a^2$ c) $xy=6$ d) $x^2=2y+4$ e) $(x-2)^2+y^2=4$ f) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ g) $x^2+y^2=a^2$ h) $20x^2-4xy+13y^2=256$ i) $x^2y^2+b^2x^2=a^2y^2=1$ j) $2x^2+y-1=0$
5. a) $(-a,b)$ b) $(a\,sec(t)\,tg(t),asec^2(t))$ c) $(-2sec^2(t),-3cosec^2(t))$ d) $(2,4t+4)$
e) $(-2sen(t),2cos(t))$ f) $(4sen^3(t)cos(t),-4cos^3(t)sen(t))$
g) $(\frac{2a(1-2t^2)}{(1+t^2)^2},-\frac{4at}{(1+t^2)^2})$ h) $(acos(t),bsec^2(t))$
i) $(2cos(t)+3sen(t),4cos(t)-2sen(t))$ j) $(2cosh(t)-3senh(t),4cosh(t)+2senh(t))$

9. a) Fazer $y=\frac{x\,t}{3}$ *b)* c) $(0,0)$ é ponto múltiplo
d) $\gamma'(t)=(6at,3a(t^2-1))$, $\gamma''(t)=(6a,6at))$

10. a) $\begin{cases} x(t) &= t \\ y(t) &= \frac{b^2t}{t^2+a^2}, \quad t\in\mathbb{R}. \end{cases}$ *b)*

11. a) Fazendo $y=t\,x$, obtemos: $\begin{cases} x(t) &= \frac{a\,(t^2-3)}{t^2+1} \\ y(t) &= \frac{a\,t\,(t^2-3)}{t^2+1}, \quad t\in\mathbb{R}. \end{cases}$ *b)*

c) $(0,0)$ ponto múltiplo para $t=\pm\sqrt{3}$, a curva é regular

12. *b)* *e)* *h)*
15. Aplique o teorema do valor médio a cada função coordenada.
17. a) é de classe C^1 b) não é regular c) $y=|x|$
19. $t=1/2$ e $(1/2,1/4,1/8)$

Capítulo IV

1. Divergência:
a) y^2 b) $1+y$ c) $3x+y+xz$ d) $yz^2+3xy^2z-3xyz^2$ e) $-sen(x)\,sen(y)+ycos(yz)$ f) $2e^x cos(y)$ g) $3x+xy$ h) $y^2z+4xyz+3xy^2$ i) $ysen(xy)-zsen(yz)+xcos(xz)$
Rotacional
a) $(-x^2,-1,2zx-2xy)$ b) $(z,1,2x-1)$ c) $(z-xy,-z+4y^3,yz-3y^2)$
d) $(-xz^3-xy^3,2xyz+yz^3,y^3z-xz^2)$ e) $(zcos(yz)-xsen(xz),0,-zsen(xz)-cos(x)cos(y))$
f) $(0,0,2e^x sen(y))$ g) $(xz,2z-4z,-y)$
h) $(6xyz-2xy^2,xy^2-3y^2z,2y^2z-2xyz)$ i) $(ysen(yz)-zcos(xz),xsen(xy))$
3. a) consevartivo: $f(x,y,z)=x^2z+xy^2+e^z+c$ b) não consevativo c) não consevativo d) consevartivo: $f(x,y,z)=e^x+2e^y+3e^z+c$ e) não consevativo f) não consevativo g) consevartivo: $f(x,y,z)=3x^2y+xz^3-yz+c$
5. a) não é harmônica b) harmônica c) harmônica d) não é harmônica
7. a) $a=4$ b) $a=4$, $b=2$ e $c=-1$ 9. b) $f(x,y,z)=-\frac{ln(x^2+y^2}{2}$
11. $m=3$ com $k=1$ e $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 13. b) Expande $div\,F>0$.

Capítulo V

1. a) $\frac{2}{3}$ b) 4π c) $16\sqrt{2}/3$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $e-1$ f) $\frac{13\sqrt{2}}{6}$ g) $4\sqrt{5}$ h) 6
3. a) $-\pi$ b) -4 c) 0
5.
a) È independente do caminho; potencial $f(x,y,z)=x^3y+y^4$; b) não é independente do caminho; c) è independente do caminho; potencial $f(x,y)=2y^3\,cos(x)+5y$;
d) è independente do caminho; potencial $f(x,y,z)=xy+xz+yz$;
e) è independente do caminho; potencial $f(x,y,z)=y\,tg(x)-ze^x$; f) è independente do caminho; potencial $f(x,y,z)=x^2z+e^z+xy^2+y^3$.
7. $-37/3$

Capítulo VI

1. a) 12 b) 12
3. a) $1/3$ b) $\frac{128}{3}$ c) $ab\pi$ d) $1/10$
5. (a) 0 b) 2π
7. $m=-1$; curva ligando os pontos $91,1)$ e $(2,3)$: $\sqrt{13}/2-\sqrt{2}$ (potencial $\sqrt{x^2+y^2}/y+c$)
9. 0
11. Aplique o teorema de Green

Capítulo VIII

1. a) $\phi(x,y)=(x,y,x)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ b) $\phi(x,y)=(x,y,1-x-y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
c) $\phi(u,t)=(u,a\,cos(t),a\,sen(t))$, $(u,t)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi]$
d) $\phi(u,t)=(u,3cos(t),sen(t))$, $(u,t)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi]$
e) $\phi(u,t)=(1+3cos(t),-2+3sen(t),u)$, $(u,t)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi]$
f) $\phi(u,t)=(cosh(u)cos(t),senh(u)sen(t),senh(u))$, $(u,t)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi]$
g) $\phi(u,v)=(x_0+a\,sen(t)cos(s),y_0+a\,sen(t)sen(s),z_0+a\,cos(s))$, $(u,t)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$
h) $\phi(x,y)=(x,y,y^2)$, $(u,t)\in\mathbb{R}^2$ i) $\phi(t,z)=(t^2,t,z)$, $(t,z)\in\mathbb{R}^2$
j) $\phi(x,y)=(x,y,x^2)$, $(u,t)\in\mathbb{R}^2$
k) $\phi(u,v)=(\frac{\sqrt{3}}{3}cos(u)\,sinh(v),\frac{\sqrt{5}}{5}cosh(v),sen(u)\,senh(v))$, $(u,v)\in[0,2\,\pi]\times\mathbb{R}$
l) $\phi(u,v)=(\frac{\sqrt{3}}{3}cos(u)\,sinh(v),\frac{\sqrt{5}}{5}sen(u)\,senh(v),cosh(v))$, $(u,v)\in[0,2\,\pi]\times\mathbb{R}$
3. a) $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$, regular b) $z=1-x^2-y^2$, regular c) $\frac{x^2}{16}+y^2=1$, regular
d) $z=x+y$, regular e) $z=x^2+y^2$, regular
5. a) $\phi(u,v)=((a+b\,cos(u))cos(v),(a+b\,cos(u))sen(v),b\,sen(u))$, $(u,t)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$
b) $\phi(u,v)=(u,cos(u)\,cos(v),cos(u)\,sen(v))$, $(u,t)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$
7. a) é regular b) $3\,\pi(10\sqrt{26}+ln(\frac{\sqrt{26}+5}{\sqrt{26}-5}))$ u.a.

Capítulo IX

Teorema de Stokes

1. a) 3π, b) -3π
3. $-4\,p$
5. π
7. (P,Q,R) campo conservativo 9. 72π

Teorema de Gauss

1. a) 36π b) 0 c) 12π d) 0
3. 4π 5. 0 9. b) 4π

Bibliografia

[RC] R. Courant: *Differential and Integral Calculus*, Intercience.

[EL] E. Lima: *Curso de Análise, Vol. II*, Ed. Universitaria.

[MW] J. Marsden- A. Tromba: *Vector Calculus*, Freeman.

[VC] M. Vilches-M. Corrêa: *Cálculo: Volume II*, www.ime.uerj.br/∼calculo.

[VM] M. Vilches: *Complementos de Equações Diferenciais*, www.ime.uerj.br/∼calculo.

Índice